UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS

Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT

NOÇÕES DE LIMITE E DERIVADA COMO UMA ESTRATÉGIA DE ENSINO MATEMÁTICO COM A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Metusalem Rodrigues Barreto

Abaetetuba – PA

2022

Metusalem Rodrigues Barreto

NOÇÕES DE LIMITE E DERIVADA COMO UMA ESTRATÉGIA DE ENSINO COM A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Pará - Campus Universitário do Baixo Tocantins, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa

Abaetetuba – PA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B273n Barreto, Metusalem Rodrigues.
Noções de limite e derivada como uma estratégia de ensino matemático com a utilização do software geogebra / Metusalem Rodrigues Barreto. — 2022.
125 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2022.

1. Limites. 2. Derivadas. 3. Software geogebra e aplicações. I. Título.

CDD 510.78

À minha esposa Sandra Maria, meu filho Mateus, meus pais Misael e Sandra Suely, e minhas irmãs Sandra e Gisele, que estiveram pertinho de mim todo o tempo, me incentivando a não desistir deste objetivo.

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo a Deus, que sempre está no controle de todas as coisas, em momentos bons ou difíceis. E se cheguei até este momento, o fiz unicamente porque Deus assim me permitiu: me guiando, protegendo, e concedendo saúde e forças pra que pudesse alcançar este objetivo.

A meus pais Misael e Sandra Suely, que sem ter sequer concluído o ensino fundamental e sendo semianalfabetos, mesmo assim sempre me incentivaram a estudar cada vez mais.

À minha irmã Gisele, que além de me apoiar moralmente, tomou a frente de muitos compromissos do dia-a-dia, inclusive cuidando de meus pais, a fim de que eu tivesse um tempo disponível para me dedicar aos estudos.

À minha irmã Sandra, que devido às suas limitações psicológicas não poderia me apoiar da forma como normalmente um irmão apoiaria outro, em momentos como os que eu precisava. Entretanto isso jamais mudará o fato de estou falando de uma irmã minha. E, sem dúvidas, não fossem suas limitações, tenho certeza que poderia contar com minha irmãzinha.

À minha esposa Sandra, a qual não poderei agradecer de forma adequada, pois depois de ficar minutos e minutos pensando, não encontro palavras que expressem a imensidão do que sinto por ela: quando estamos juntos tudo parece tão natural; se ela se vai, falta uma parte de mim, já não estou mais completo.

A meu filho Mateus, que não deixava de tentar me animar para não sossegar de forma alguma enquanto não concluísse este trabalho. Espero que esta conquista o incentive a lutar por seus objetivos.

A meus professores, amigos, e em especial, meu orientador Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa. Tenho que agradecer a este grupo maravilhoso de pessoas comprometidas com a educação, e de caráter exemplar. Durante esse período que passamos juntos a luta e as conquistas de cada um, sem dúvida serviram de muito incentivo aos demais.

A todos e por tudo!

“Não espere por uma crise para descobrir o que é importante em sua vida”.

Platão

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo encorajar professores da Educação Básica a introduzir os conceitos básicos iniciais de Limites e Derivadas no terceiro ano do ensino médio, utilizando como ferramenta pedagógica o software GeoGebra. Queremos mostrar que é possível introduzir o estudo do cálculo na educação básica, e não apenas isso, que podemos fazê-lo de uma maneira lúdica, mais ilustrativa e perceptiva, tornando assim esse estudo mais atraente para o aluno. Fazendo uso desse software temos a intenção de tornar mais fácil e ágil não só a introdução dos conceitos, mas também a manipulação, interpretação e análise dos mesmos por parte do educando. Temos a ideia de tornar o estudo do cálculo na educação básica um estudo mais visual e intuitivo do que formal, visando promover um primeiro contato do aluno com este conteúdo. Dessa forma, acreditamos que ao se deparar com a disciplina de cálculo em algum curso de nível superior o aluno terá um melhor aproveitamento da disciplina.

Palavras Chave: Limites, Derivadas, Software GeoGebra e Aplicações

ABSTRACT

The present work aims to encourage Basic Education teachers to introduce the initial basic concepts of Limits and Derivatives in the third year of high school, using the GeoGebra software as a pedagogical tool. We want to show that it is possible to introduce the study of calculus in basic education, and not only that, that we can do it in a playful, more illustrative and perceptive way, thus making this study more attractive to the student. Using this software, we intend to make it easier and more agile not only to introduce concepts, but also to manipulate, interpret and analyze them by the student. We have the idea of making the study of calculus in basic education a more visual and intuitive study than a formal one, aiming to promote the student's first contact with this content. In this way, we believe that when faced with the discipline of calculus in some course of higher level, the student will have a better use of the discipline.

Keywords: Limits, Derivatives, GeoGebra Software and Applications.

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática sempre esteve presente na vida do ser humano. O homem sempre fez uso de conhecimentos matemáticos para resolver desde problemas simples do seu dia-a-dia até àqueles que, em dado momento pareciam abstratos demais, mas que, algum tempo depois se mostravam aplicáveis à vida cotidiana (OLIVEIRA; ALVES; NEVES, 2008)

O homem usa a Matemática para resolver seus problemas e, por outro lado, os problemas da vida humana impulsionam o progresso da Matemática. O desenvolvimento das sociedades sempre foi alavancado pelas descobertas matemáticas, e à medida que as sociedades se organizavam o cenário se tornava propício para que a Matemática se desenvolvesse cada vez mais (PCN – Edição Especial, p.51)

Atualmente a Matemática está presente de forma marcante em diversas áreas do conhecimento humano como: Física, Geografia, Informática, Engenharia, Economia, Arquitetura, Estatística, Medicina, Biologia, etc. O avanço de cada uma dessas áreas de conhecimento está intimamente ligado ao avanço do própria Ciência Matemática. Em especial, queremos destacar aqui o avanço da informática propiciado pelos conhecimentos da matemática e ao mesmo tempo a informática está possibilitando, com velocidade jamais vista na história da humanidade, a expansão do saber matemático. (BRASIL, 2002).

Uma das ferramentas mais importantes da Matemática, a partir dos trabalhos de Isaac Newton (1642-1727) e Wilhelm Leibniz (1646-1716), passou a ser o cálculo. Na educação básica a Matemática costuma ser abordada sob três aspectos principais: aritmética, álgebra e geometria. Entretanto o cálculo diferencial e integral normalmente é deixado para estudos posteriores nos cursos de nível superior. Para alguns autores como Ávila, Dominguini, Elon, Molon e Oliveira o cálculo deve ser inserido no currículo do ensino médio. E não apenas isso, pode-se utilizar as tecnologias que estiverem a disposição como meio auxiliar para facilitar a compreensão por parte do aluno (ÁVILA, 1991)

O estudo do cálculo fez parte do currículo da educação básica brasileira por algum tempo, e ainda integra a grade curricular de muitas instituições da rede particular de ensino e de escolas preparatórias para os vestibulares das instituições militares, como o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA) e o Instituto Militar de Engenharia (IME), entre outros.

Tendo em vista essa aplicabilidade em outras instituições de ensino, busca-se como proposta nesse trabalho enfatizar o desenvolvimento dos estudos de limites e derivadas assim como problemas a eles relacionados no sentido de mostrar a relevância desses conhecimentos como acréscimo a mais para alunos e professores interessados em entender esses conhecimentos. Assim sendo, procura-se abordar como objetivo geral: Desenvolver as noções de limite e derivada como uma estratégia de ensino utilizando o auxílio do Software GeoGebra. Tratando-se desse objetivo, utiliza-se como específicos: Compreender do surgimento de limite e derivada considerando o aspecto histórico; Desenvolver os conceitos de derivada para as funções de uma variável e utilizar o Software Geogebra como estratégia de ensino da Matemática no esboço de funções no plano cartesiano.

Justifica-se o trabalho tendo com base que o cálculo representa uma das mais importantes ferramentas da matemática, e com grande quantidade de aplicações em diversas áreas do conhecimento, como Física por exemplo, defende-se que o mesmo seja abordado na educação básica. Isto obviamente deve ser feito com certa sutileza: sem excesso de rigor ou formalismos desnecessários, já que o objetivo de alguns autores é a busca de promover um primeiro contado do aluno com alguns conhecimentos básicos do cálculo (ÁVILA, 1991)

O cálculo é de fundamental importância num considerável número de cursos de nível superior o que reforça ainda mais o desenvolvimento de primeiras noções de cálculo para os alunos do ensino básico, pois os alunos concluem o ensino médio sem possuírem as noções básicas desse conhecimento matemático. Portanto, inserindo o estudo do cálculo no ensino básico há grande possibilidade de um maior aproveitamento nas primeiras disciplinas inclusas em cursos de graduação nas áreas de ciências exatas e naturais o que poderia contribuir para um melhor ensino nas primeiras disciplinas da graduação.

Defende-se neste trabalho que pelo menos os conceitos mais básicos de limites e derivadas devem ser estudados no ensino médio. E isto é defendido também por uma série de professores tanto da educação básica quanto de nível superior. Tanto é verdade que vários livros didáticos de nível médio trazem um ou mais capítulos destinados ao estudo de limites e derivadas. Mas ocorre que, na maioria das escolas esse tópico é deixado de lado. E dessa forma, os alunos concluem o ensino médio sem terem nenhum contato com as noções de cálculo.

Além disso, quer-se mostrar que usando o software GeoGebra, é possível introduzir os conceitos de limite e derivada de forma mais fluida e dinâmica, com pouco formalismo e de maneira bem ilustrativa e atrativa para o aluno. Isto não só vem de encontro ao nosso objetivo como também propicia a integração da informática no contexto educacional do aluno. Além disso, estaremos utilizando o computador e os softwares como meios para auxiliar o aprendizado do aluno, favorecendo a construção de seus conhecimentos.

Escolheu-se usar como ferramenta de apoio pedagógico o software GeoGebra por este ser de uso bem simples e intuitivo, e funcionar perfeitamente em smartphones, tablets e computadores. Dessa maneira será mostrado neste trabalho que as noções de cálculo devem e podem ser ensinadas a alunos do ensino médio. E mais que isto, mostraremos uma forma de fazê-lo com a utilização do GeoGebra como ferramenta de apoio.

CAPÍTULO I – NOÇOES DE LIMITES

1.1 – BREVE COMENTÁRIO SOBRE O SURGIMENTO DO CÁLCULO

Os primeiros indícios de algum estudo que tenha relação, ainda que indireta, com o cálculo diferencial e integral da forma como o conhecemos atualmente, e que datam de mais de dezessete séculos antes de Cristo segundo (BOYER, 1992) foram encontrados no Papiro egípcio de Rhind e nas tábuas cuneiformes dos babilônios. Portanto, a história do cálculo tem origens que remontam há vários séculos. Apesar de todo esse intervalo de tempo até os dias atuais, os conceitos relacionados ao cálculo, como limite, derivada, integral e continuidade, só adquiriram forma muito parecida com a que temos atualmente, inclusive com relação à própria notação, a partir do final do século XVII depois de Cristo.

Desde seus primeiros indícios, e avançando um pouco no tempo, o cálculo aparece na Grécia Antiga por meio de problemas de incomensurabilidade, com os quais os Matemáticos gregos se confrontavam naquela época. O matemático Eudoxo (408-355 a.C.) usava o método da exaustão para calcular áreas de círculos, e o matemático Euclides (287-212 a.C) usava o mesmo método para calcular áreas de elipses, parábolas e hipérboles. O método de Eudoxo e Euclides se valia de conceitos infinitesimais para calcular áreas.

O método da exaustão usado por Eudoxo, de forma bem resumida, consistia em inscrever polígonos com quantidade de lados cada vez maior em um círculo, por exemplo, para tentar aproximar com exatidão cada vez maior a área do polígono inscrito da área do círculo, a qual se queria calcular. Isso podia ser feito, por exemplo, tomando-se um círculo e inscrevendo nele um quadrado. Daí, em cada etapa do processo, podia-se dobrar a quantidade de lados do polígono da etapa anterior. Fazendo isso exaustivamente, e daí vem o nome do método, e dizendo em linguagem moderna, quando a quantidade de lados do polígono tendia ao infinito, a área do polígono tendia a se igualar à área do círculo em questão.

Euclides usou um conceito que se assemelha ao que hoje chamamos de integral, e que consistia basicamente em particionar uma região em um número cada vez maior de retângulos paralelos, de modo que ele pudesse obter a área ou o volume que pretendia usando a soma das áreas ou dos volumes dessas parcelas.

Mais adiante, a partir do final do século XVI, aparecem estudos como os de Simon Stevin (1548-1620) sobre hidrostática e estática dos sólidos, Kepler (1571-1630), que usou conceitos de limite e continuidade para formular suas três leis que descreviam o movimentos do planetas em torno do Sol, Fermat que usava o método da reta tangente para determinar máximos e mínimos de funções. Todos esses estudos, ainda que de forma não sistematizada e organizada, propiciaram um conjunto de conceitos e técnicas que posteriormente seriam aproveitadas e que culminariam na construção moderna do que chamamos de Cálculo Diferencial e Integral.

Oficialmente os criadores do Cálculo Diferencial e Integral são o inglês Isaac Newton (1642-1727) e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Cada um fez seu trabalho de forma independente do outro. Newton teria feito seu trabalho cerca de 10 anos antes de Leibniz, mas foi Leibniz quem publicou primeiro. (BOYER, 1992)

1.2 – NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE

Consideremos inicialmente a função $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$. Obviamente não podemos aplicar o valor $x = 1$ a esta função, pois nesse caso, teríamos uma indeterminação do tipo $f(1) = \frac{0}{0}$. Por isso, a função f está definida em todo x real, exceto no ponto $x = 1$.

Mesmo sabendo que f não está definida em $x = 1$, vamos estudar o comportamento dessa função na “vizinhança” próxima do número 1, isto é, para valores de x “próximos” de 1. E faremos isto de duas maneiras: tanto por valores menores, quanto por valores maiores que 1, e se aproximando cada vez mais dele, através das duas tabelas a seguir:

Tabela 1

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999	0,9999
$f(x)$	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998	2,9998

Tabela 2

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f(x)$	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002	3,0002

Observando na tabela 1 a sequência dos valores de x e a sequência dos valores assumidos pela função $f(x)$ é bastante razoável afirmar que quando x se aproxima de 1 por valores menores, e na Matemática costumamos dizer que x tende a 1 pela esquerda, a função tende ao valor 3.

De modo análogo, olhando a tabela 2 é fácil notar que quando os valores de x se aproximam de 1 por valores maiores, e na Matemática expressamos isto dizendo que x tende a 1 pela direita, a função tende novamente ao valor 3.

Resumindo as duas observações acima, concluímos que quando x se aproxima de 1, tanto pela esquerda (valores menores) quanto pela direita (valores maiores), a função se aproxima do mesmo valor 3. Nesse caso dizemos que o limite da função $f(x)$ quando x tende a 1 é 3; e representamos esta afirmação, de forma mais técnica e usando uma simbologia mais específica, assim:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x-1}=3 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to 1} f(x)=3$$

Não é tão difícil perceber que, para $x \neq 1$, é possível aplicar a seguinte fatoração à função $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x-1}$:

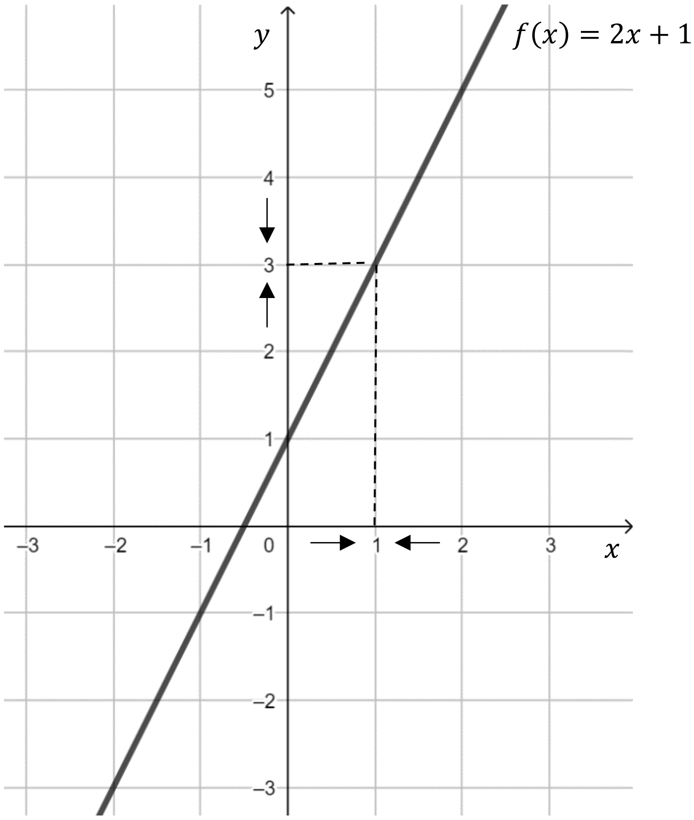
$$f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x-1} \quad \to \quad f(x)=\frac{(2x+1)(x-1)}{x-1} \quad \to \quad f(x)=2x+1$$

Como esta última função obtida depois da fatoração não possui indeterminação no ponto $x=1$ podemos aplicar este valor na função, obtendo $f(1)=3$, que é o mesmo valor limite que encontramos utilizando as duas tabelas anteriores.

A fatoração feita anteriormente é possível porque não estamos interessados no valor exato que a função assume no ponto $x=1$, queremos apenas saber para qual valor a função se aproxima quando x se aproxima de 1. Inclusive, a função pode nem mesmo estar definida no ponto em questão e mesmo assim o limite existir.

Como a construção do gráfico da função $f(x)=2x+1$ nas proximidades do ponto $x=1$ é bastante simples, não temos dificuldade nenhuma em fazer a mesma análise utilizando o recurso gráfico. E podemos constatar visualmente o comportamento da função descrito anteriormente, pelo gráfico da figura 1 a seguir:

Figura 1



Fonte: O próprio autor (Barreto, 2022)

1.3 – DEFINIÇÃO DE LIMITE E SUAS PROPRIEDADES

Definição 1.1: Seja I um intervalo aberto ao qual pertence o número real x_0 e seja f uma função definida para $x \in I - \{x_0\}$. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é L, e escrevemos isso sob a forma

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

quando $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0\ tal\ que\ se\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$

Da definição acima podemos concluir que o objetivo do estudo de limites é analisar o comportamento dos valores da imagem de uma função quando os valores de x

no seu domínio se aproximam de determinado valor fixo x_0. Essa análise pode ser feita em qualquer parte do domínio da função, que na definição é representado pelo intervalo aberto I.

Além disso, nota-se que para se descobrir o limite da função não é necessário sabermos qual o valor dela exatamente no ponto x_0, na verdade basta apenas observar valores próximos a ele. Para evidenciar este fato vamos considerar a função $f(x) = \begin{cases} 2x+1, se\ x \neq 1 \\ 5, se\ x = 1 \end{cases}$.

Analisando o ponto $x = 1$ e suas proximidades, temos que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x+1) = 3 \qquad \text{e} \qquad f(1) = 5$$

Ou seja, quando x se aproxima de 1 pela esquerda (por valores menores) e pela direita (por valores maiores), a função dada se aproxima do valor 3 (que é o limite, nesse caso). Mas o valor da função em 1 é igual a 5, que não é o mesmo valor do limite. Como não estamos interessados em encontrar o valor da imagem da função no ponto $x = 1$, não faz diferença que esse valor seja o mesmo valor do limite. Como vimos acima, $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$.

Outra situação importante a ser analisada é que mesmo que a função não esteja definida no ponto em questão, ainda assim é possível que exista o seu limite. E vamos verificar essa possibilidade analisando a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ no ponto $x = 1$.

Obviamente essa função não está definida para $x = 1$, pois se tentássemos aplicar esse valor à função chegaríamos a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Mas, lembrando que para obter o limite da função não há necessidade que x assuma o valor 1, podemos aplicar uma fatoração simples à essa função obtendo o seguinte:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

Daí fazendo a análise da função $f(x) = x + 1$ quando x se aproxima de 1, de maneira semelhante ao que fizemos no item 1.2, chegamos à conclusão de que $f(x)$ se aproxima do valor 2. Ou seja,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

Neste momento também é importante enfatizar o fato de que o limite, quando existe, é único. Isto significa que se os valores de x se aproximam de um valor x_0 tanto por valores menores quanto por valores maiores, o limite tem que ter o mesmo valor. Caso os valores obtidos sejam diferentes, diremos então que a função não tem limite. Demonstraremos esta observação sob a forma do teorema a seguir:

Teorema (Unicidade do Limite): Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Demonstração:

Vamos demonstrar este teorema por redução ao absurdo.

Obviamente para começar, admitimos que $L_1 \neq L_2$, e ao final chagaremos a uma contradição.

Portanto, considerando $L_1 \neq L_2$ teremos o seguinte:

- Para $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_1 > 0 \; tal\ que\ se \; 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \to \quad |f(x) - L_1| < \varepsilon \qquad (1)$$

- Para $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_2 > 0 \; tal\ que\ se \; 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \to \quad |f(x) - L_2| < \varepsilon \qquad (2)$$

Usando uma pequena manipulação algébrica podemos escrever que:

$$L_1 - L_2 = L_1 - f(x) + f(x) - L_2 \qquad (3)$$

Agora lembremos da desigualdade triangular: Dados quaisquer dois números reais a e b temos que $|a + b| \leq |a| + |b|$, ocorrendo a igualdade quando $a = b$.

Aplicando a desigualdade triangular em (3) segue que:

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| < |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| =$$
$$= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$

Neste ponto vamos considerar δ como sendo o menor dentre os números δ_1 e δ_2. Isto é, $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$.

Daí, utilizando o que foi descrito acima em (1) e (2) teremos:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que:

$0 < |x - x_0| < \delta \quad \rightarrow \quad |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\varepsilon$

Mas como já vimos acima:

$|L_1 - L_2| < |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$

Então podemos reescrever que

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que:

$0 < |x - x_0| < \delta \quad \rightarrow \quad |L_1 - L_2| < 2\varepsilon$

Agora, tomando $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$ e ainda considerando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ concluímos que:

$0 < |x - x_0| < \delta \quad \rightarrow \quad |L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$

Como esta última afirmação é contraditória, nossa suposição inicial de que $L_1 \neq L_2$ é falsa. Logo $L_1 = L_2$, e isto demonstra que o limite de uma função, quando existe é único.

A seguir enunciamos as propriedades operatórias básicas dos limites com algum exemplo de como aplica-las para efeito de ilustração. Tais propriedades algébricas dos limites são uteis para simplificar alguns cálculos, como é o caso de funções que podem ser entendidas como sendo a soma, o produto ou o quociente de outras funções mais simples.

Obviamente, no que se segue, estamos admitindo que x_0 é um elemento de um intervalo aberto no qual as funções em questão estão definidas. Lembrando que as funções não precisam estar definidas exatamente em x_0.

Propriedade 1: O limite de uma função constante é igual à própria constante.

Seja $c \in R$ e f uma função definida por $f(x) = c$. Então para todo $x \in R$ teremos $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c$.

Demonstração:

Note que $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ para qualquer valor de ε positivo.

Daí a expressão

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\ tal\ que\ se\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \rightarrow \quad |f(x) - c| < \varepsilon$

Se torna sempre verdadeira independentemente dos valores tomados para δ e ε.

Propriedade 2: O limite do produto entre uma constante e uma função limitada é igual ao produto da constante pelo limite da função.

Seja $c \in R$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Então para todo $x \in R$ teremos $\lim_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot L$.

Demonstração:

Vamos demonstrar esta propriedade para os casos em que $c = 0$ e $c \neq 0$ separadamnente.

1º Caso: Para $c = 0$.

Se $c = 0$, então:

$c \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$.

Agora aplicando a propriedade 1 vem

$$\lim_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = \lim_{x \to x_0} [0 \cdot f(x)] = \lim_{x \to x_0} 0 = 0 = 0 \cdot L = c \cdot L = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

2º Caso: Para $c \neq 0$.

Sabemos por hipótese que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Ou seja:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\ tal\ que\ se\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Para chegar ao resultado que queremos vamos tomar $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{|c|}$. Nessa situação:

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \to \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

Daí multiplicando ambos os membros da última desigualdade por $|c|$ ficamos com:

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \to \quad |c| \cdot |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|c|} \cdot |c|$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \to \quad |c \cdot [f(x) - L]| < \varepsilon$$

Com isso conclui-se que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \; tal\ que\ se\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \rightarrow \quad |c \cdot f(x) - c \cdot L| < \varepsilon$$

Esta última afirmação e equivalente a dizer que

$$\lim_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot L$$

como queríamos demonstrar.

Propriedade 3: O limite da soma é igual à soma dos limites e, de maneira análoga, o limite da diferença é igual à diferença dos limites.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$, então $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = L_1 + L_2$ e $\lim_{x \to x_0} (f - g)(x) = L_1 - L_2$.

Demonstração Relacionada à Soma:

Vamos demonstrar inicialmente que

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1 + L_2.$$

Dos fatos de que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$, que são nossas hipóteses iniciais, segue respectivamente que:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_1 > 0 \; tal\ que\ se\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \rightarrow \quad |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_2 > 0 \; tal\ que\ se\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \rightarrow \quad |g(x) - L_2| < \varepsilon$$

Escolhendo de maneira adequada $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$. Essas expressões ficam assim:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_1 > 0 \; tal\ que\ se\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \rightarrow \quad |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_2 > 0 \; tal\ que\ se\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \rightarrow \quad |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Portanto se adotarmos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, então $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \; tal\ que$

$$se\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \rightarrow \quad |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (1)$$

Por último, aplicamos a desigualdade triangular para obter:

$$|(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon$$

$$\left|\big(f(x) + g(x)\big) - (L_1 + L_2)\right| < \varepsilon$$

$$\left|\big((f + g)(x)\big) - (L_1 + L_2)\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

Do que obtivemos em (1) e (2) podemos então concluir a demonstração.

Demonstração Relacionada à Diferença:

Vamos demonstrar agora que

$$\lim_{x \to x_0} (f - g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1 - L_2.$$

Novamente usaremos os fatos de que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$, que são nossas hipóteses iniciais e também o que já foi demonstrado anteriormente.

$$\underset{x \to x_0}{\mathrm{Lim}} (f - g)(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} [f(x) + (-1) \cdot g(x)] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1 - L_2$$

Propriedade 4: O limite do produto de funções é igual ao produto dos limites.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$, então $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$

Demonstração:

Podemos usar nesta demonstração a seguinte manipulação algébrica:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - L_1 \cdot g(x) + L_1 \cdot g(x) - L_1 \cdot L_2 + L_1 \cdot L_2$$

$$(f \cdot g)(x) = [f(x) - L_1] \cdot g(x) + L_1 \cdot [g(x) - L_2] + L_1 \cdot L_2$$

Aplicando agora o limite a esta última expressão temos:

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - L_1] \cdot g(x) + L_1 \cdot [g(x) - L_2] + L_1 \cdot L_2$$

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - L_1] \cdot g(x) + \lim_{x \to x_0} L_1 \cdot [g(x) - L_2] + \lim_{x \to x_0} L_1 \cdot L_2$$

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0 \cdot g(x) + L_1 \cdot 0 + L_1 \cdot L_2$$

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$$

Observação: Admitiremos sem demonstração que esta propriedade pode ser estendida, de maneira totalmente análoga, a um produto que envolva mais de duas funções, desde que seja uma quantidade finita de fatores. Isto é:

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = L_1, \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = L_2, \dots, \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = L_n$, então

$$\lim_{x \to x_0} (f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_n$$

Propriedade 5: O limite da potência de uma função é igual à potência do limite dessa função.

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to x_0} f^n(x) = L^n, \forall\, n \in N^*$.

Demonstração: Esta propriedade é obtida quando usamos a observação anterior para o caso em que $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = f$. Nesse caso tem-se:

$$\lim_{x \to x_0} (f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)(x) = \lim_{x \to x_0} (f \cdot f \cdot \dots \cdot f)(x) = \lim_{x \to x_0} f^n(x) = L \cdot L \cdot \dots \cdot L = L^n$$

Propriedade 6: O limite do quociente é igual ao quociente dos limites.

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$, com $L_2 \neq 0$, então $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2}$

Demonstração:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = L_1 \cdot \frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

Observação: Veja que para concluir a demonstração acima utilizamos sem prévia demonstração o fato de que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$. Na verdade, ao longo da elaboração deste trabalho alguns resultados serão aceitos sem demonstração. Às vezes porque as ferramentas utilizadas para tal fogem de uma abordagem mais básica, outras vezes porque a própria demonstração não é o objetivo a que nos propomos. Há também casos, como o que acabamos de mencionar, que admitiremos um resultado que nos pareça bem óbvio, pois não queremos um excesso de demonstrações nem de comentários que tornem a parte teórica deste trabalho muito longa e cansativa para o leitor.

Um exemplo do que foi dito é a próxima e última propriedade, que iremos enunciar a seguir sem demonstração e utilizaremos posteriormente.

Propriedade 7: O limite da raiz $n - ézima$ de uma função é igual à raiz $n - ézina$ do limite da função.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, então $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, para $L \geq 0$ e $n \in N^*$ ou para $L < 0$ e n um natural ímpar.

Vamos admitir, também sem demonstração, que o limite de uma função polinomial do tipo $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \cdot ... \cdot +a_nx^n$ corresponde ao valor numérico da função para $x = x_0$. Em outras palavras:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

1.4 – LIMITES LATERAIS

No início da seção 1.3 tínhamos feito um comentário sobre limites que vamos retomar agora para torna-lo um pouco mais preciso do ponto de vista matemático, sem a intenção de exagero no rigor nem na linguagem empregada aqui. Nossa intenção é apenas melhorar o entendimento do que falamos e usar a nomenclatura matemática adequada. Trata-se do conceito de Limites Laterais.

Havíamos comentado que a variável x de uma função $f(x)$ podia se aproximar de um valor fixo x_0, tomado no domínio da função, tanto pela esquerda (ou seja, por valores menores) quanto pela direita (ou seja, por valores maiores) e em qualquer dos dois casos a função se aproximava do mesmo valor L na imagem, que nesse caso era dito como sendo o limite da função para o ponto x_0.

Daqui em diante, para expressar que os valores de x se aproximam tanto quanto quisermos de um dado valor x_0 por valores menores que x_0, diremos que "x tende a x_0 pela esquerda"; e de maneira análoga, para expressar que os valores de x se aproximam tanto quanto quisermos de um dado valor x_0 por valores maiores que x_0, diremos que "x

tende a x_0 pela direita". E representaremos estes dois comportamentos descritos, respectivamente, com as seguintes simbologias:

$$x \to {x_0}^- \quad \text{e} \quad x \to {x_0}^+$$

Ditas estas coisas, vamos então introduzir as duas definições a seguir:

Limite Lateral à Esquerda: Dada uma função f definida no intervalo aberto $]b, x_0[$, seu limite lateral à esquerda é o valor L, que representamos por

$$\lim_{x \to {x_0}^-} f(x) = L$$

quando, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\ tal\ que\ se\ x_0 - \delta < x < x_0 \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$

O que estamos dizendo com a definição acima é que quando x tende a x_0 pela esquerda, a função $f(x)$ tende a L. E nesse caso dizemos que o número L é o limite lateral à esquerda dessa função.

Limite Lateral à Direita: Dada uma função f definida no intervalo aberto $]x_0, b[$, seu limite lateral à direita é o valor L, que representamos por

$$\lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = L$$

quando, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\ tal\ que\ se\ x_0 < x < x_0 + \delta \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$

Esta definição nos informa que quando x tende a x_0 pela direita, a função $f(x)$ tende a L. E nesse caso dizemos que o número L é o limite lateral à direita dessa função.

Nota: Nas duas definições acima usamos a letra "L" para representar os limites laterais à esquerda e à direta, mas isso não significa que esses valores são necessariamente iguais. Como veremos mais adiante há casos em que os limites laterais são iguais e casos em que eles são diferentes.

Exemplo 1: Considere a função $f(x) = x^2 - x + 1$. Determine os limites $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

Resolução:

Para determinação de $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ vamos usar a tabela seguinte:

Tabela 3

x	3	2,5	2,25	2,1	2,01	2,001	2
$f(x)$	7	4,75	3,8125	3,31	3,0301	3,003001	3

Observa-se nesta tabela que à medida que os valores de x se aproximam de 2 por valores maiores, a função se aproxima do valor 3. E podemos constatar inclusive que para o valor $x = 2$ obtemos exatamente o valor 3. Ou seja, $f(2) = 3$.

A fim de determinar $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ usaremos a seguinte que se segue:

Tabela 4

x	1	1,5	1,75	1,9	1,99	1,999	2
$f(x)$	1	1,75	2,3125	2,71	2,9701	2,997001	3

Agora observa-se na tabela 4 acima que para x tendendo a 2 pela esquerda (ou seja, por valores menores que x) a função $f(x)$ tende a 3.

As tabelas 3 e 4 acima estão nos mostrando que quando x tende a 2, tanto pela esquerda quanto pela direita, $f(x)$ tende a 3. Isto é, que os limites laterais são iguais. Portanto podemos escrever neste exemplo que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

E não apenas isso. Também pode-se concluir que

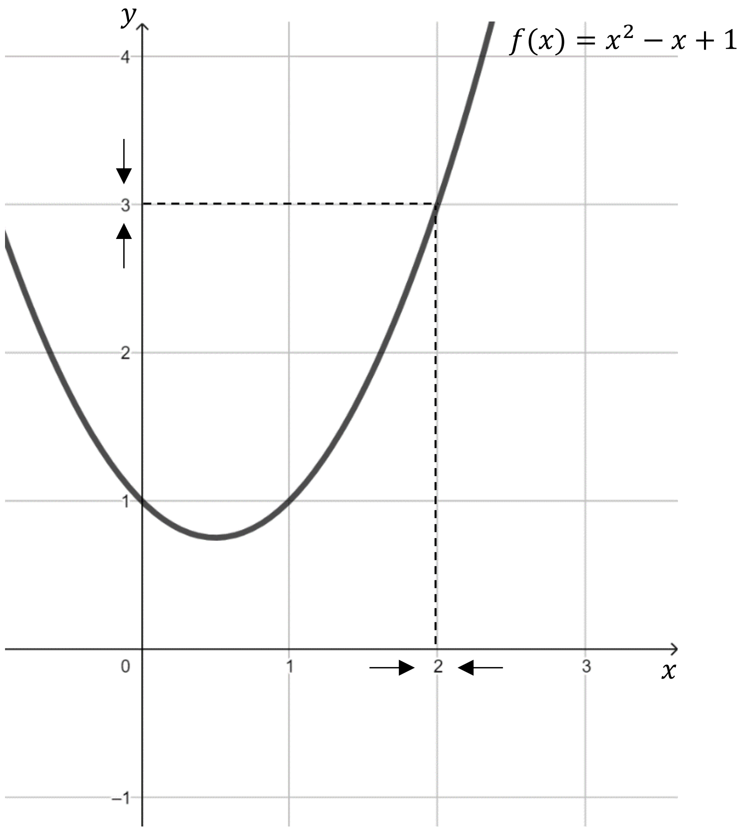
$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

Pois como já vimos, $f(2) = 3$.

Portanto neste primeiro exemplo observa-se que além de os limites laterais coincidirem eles são exatamente iguais à imagem da função para o ponto $x = 2$.

Mesmo não havendo a necessidade, observemos o gráfico desta função nas proximidades do ponto $x = 2$.

Figura 2



Fonte: O próprio autor (Barreto, 2022)

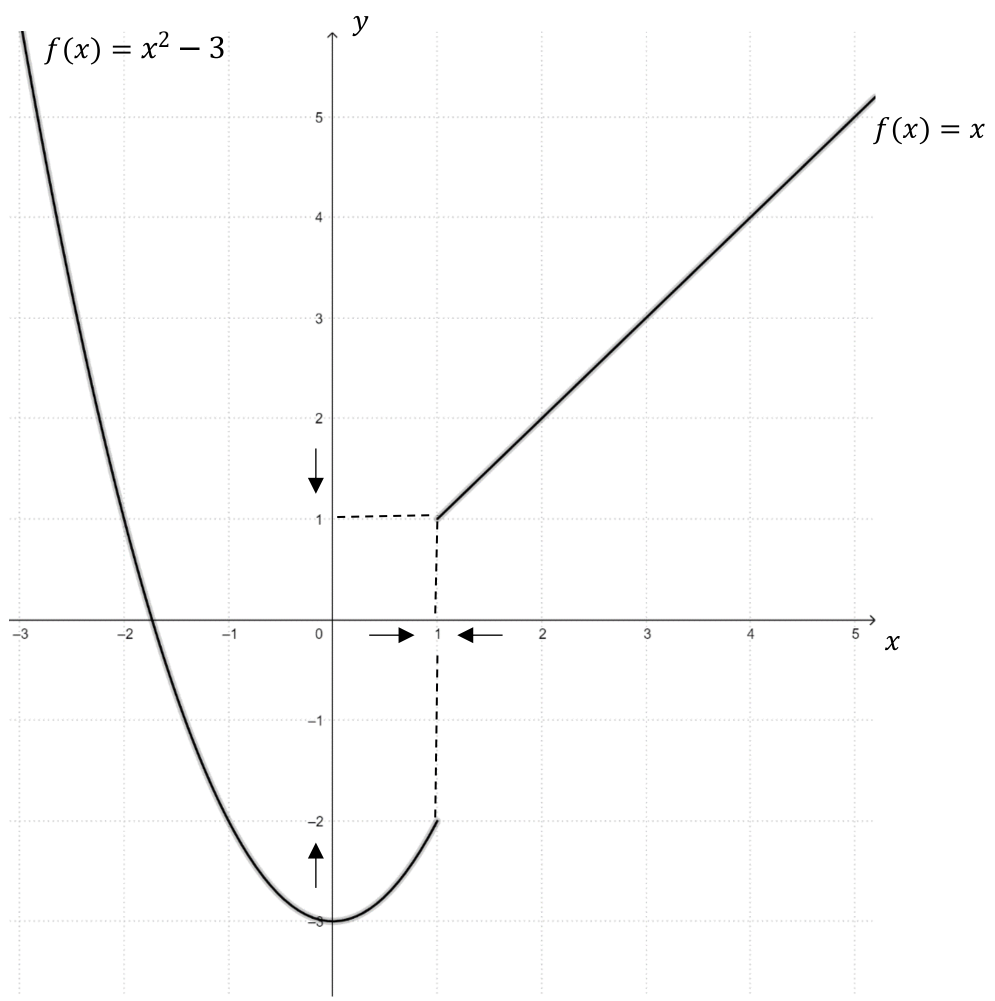
O gráfico da figura 2 acima, cuja interpretação é bastante simples, reafirma o que foi dito anteriormente: quando x tende a 2, tanto pela esquerda quanto pela direita, $f(x)$ tende a 3 (em ambos os casos). E como os limites laterais coincidem pode-se dizer que, para $x = 2$, o limite da função $f(x) = x^2 - x + 1$, é igual a 3. Simbolicamente pode-se escrever:

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ e \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \end{matrix}\right\} \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

Exemplo 2: Considere a função $f(x) = \begin{cases} x, se\ x \geq 1 \\ x^2 - 3, se\ x < 1 \end{cases}$. Determine os limites $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

Resolução: Vamos observar o gráfico desta função nas proximidades do ponto $x = 1$.

Figura 3



Fonte: O próprio autor (Barreto, 2022)

Neste caso pode-se perceber claramente que há um "salto" no gráfico da função no ponto $x = 1$. Este salto faz com que os limites laterais sejam diferentes, pois observa-se que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -2 \text{ e } \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

A conclusão é que os limites laterais são diferentes e, portanto, a função dada neste exemplo não tem limite no ponto $x = 1$. E é importante também observar que $f(1) = 1$.

Funções que apresentam um salto em seu gráfico (como acabamos de verificar neste exemplo) são *descontínuas*. Neste exemplo, portanto, a função que foi analisada é descontínua no ponto $x = 1$, pois nesse ponto do seu domínio o gráfico apresenta um salto. Como veremos pouco mais adiante, caso a função não tenha saltos em seu gráfico e esteja definida no ponto em questão, dizemos que ela é contínua. É o que veremos na seção 1.6.

Antes disso, no entanto, é conveniente primeiro introduzirmos os conceitos que se seguem, de limites infinitos e limites no infinito.

1.5 – LIMITES INFINITOS E LIMITES NO INFINITO

Para introduzir o conceito de limite infinito vamos considerar a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e analisar o seguinte: à medida que os valores de x se aproximam de $zero$ tanto pela esquerda quanto pela direita, os valores de x^2 tornam-se cada vez menores, e isso faz com que os valores da função cresçam cada vez mais e de maneira ilimitada, pois para x^2 cada vez menor o quociente $\frac{1}{x^2}$ fica cada vez maior. Ou, em outras palavras, quando x tende a zero a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tende ao infinito.

Podemos inclusive verificar essa tendência observando a tabela a seguir:

Tabela 5

x	1	0,5	0,25	0,1	0,01	0,001
$f(x)$	1	4	16	100	10000	1000000

Este tipo de raciocínio nos leva então à definição seguinte:

Definição: Seja f uma função definida em algum intervalo aberto contendo x_0, mas não necessariamente definida no próprio x_0. Dizemos que quando x tende a x_0 a função f tende a mais infinito, e representamos isto por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se, $\forall\, M > 0, \exists\, \delta > 0\ tal\ que\ se\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \rightarrow \quad f(x) > M$

Na expressão acima o símbolo "$+\infty$" pode ser lido como "*mais infinito*" ou "*infinito positivo*". Esse símbolo não deve ser entendido como um valor numérico, pois ele nem representa um número real. Ele apenas representa o fato de que a função cresce de maneira ilimitada quando x se aproxima de x_0.

O que esta definição está nos dizendo é que não importa o quão grande seja o número positivo M, se tomarmos valores de x próximos o suficiente do valor fixo x_0, então o valor da função $f(x)$ irá superar o valor de M. Dizendo isso de outra forma similar, quando x fica infinitamente próximo de x_0 o valor da função torna-se infinitamente grande, ultrapassando qualquer valor que possamos escolher.

Também vale a pena destacar que nessa definição subentende-se o fato de que o valor de δ depende do valor de M. Isto porque quanto maior for o valor de M considerado menor será o valor de δ, a fim de que os valores de x fiquem suficientemente próximos de x_0.

Agora, fazendo uma alteração sutil na função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para que se torne a função $g(x) = -\frac{1}{x^2}$, a diferença no comportamento desta última é que: à medida que os valores de x se aproximarem de $zero$ tanto pela esquerda quanto pela direita, os valores de $-\frac{1}{x^2}$ ficam cada vez menores, já que a função $g(x)$ tem um sinal de "menos" antes do quociente $\frac{1}{x^2}$. Ou, em outras palavras, quando x tende a zero a função $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ tende a "menos infinito".

A tendência descrita acima pode ser verificada na tabela 6 a seguir:

Tabela 6

x	1	0,5	0,25	0,1	0,01	0,001
$f(x)$	-1	-4	-16	-100	-10000	-1000000

Pensando dessa forma somos conduzidos à definição outra definição:

Definição: Seja f uma função definida em algum intervalo aberto contendo x_0, mas não necessariamente definida no próprio x_0. Dizemos que quando x tende a x_0 a função f tende a "menos infinito", e representamos isto por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se, $\forall\, M < 0, \exists\, \delta > 0\ tal\ que\ se\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \to \quad f(x) < M$

Na expressão acima o símbolo "$-\infty$" pode ser lido como "*menos infinito*" ou "*infinito negativo*". Mais uma vez ressaltamos que símbolo $-\infty$ não deve ser entendido como um valor numérico da função, pois ele não é um número real. Ele apenas representa o fato de que a função decresce de maneira ilimitada quando x se aproxima de x_0.

E podemos interpretar esta definição dizendo que não importa o quão pequeno seja o número positivo M, se tomarmos valores de x próximos o suficiente do valor fixo x_0, o valor da função $f(x)$ sempre será inferior ao valor de M (sem sequer igualar M). Ou, em outras palavras, quando x fica infinitamente próximo de x_0 o valor assumido pela função torna-se infinitamente pequeno, sendo sempre um valor inferior ao valor escolhido para M.

Mesmo sem a intenção de nos aprofundar em uma quantidade excessiva de detalhes sobre os temas estudados neste capítulo, ainda achamos que é pertinente atentar para mais uma situação envolvendo limites infinitos. Trata-se do caso em que a função em questão apresenta limites infinitos opostos.

Para explicar melhor o que dissemos no parágrafo anterior vamos promover uma pequena alteração algébrica na função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, obtendo a função $h(x) = \frac{1}{x}$, e vamos analisar seu comportamento.

Considerando então a função $h(x) = \frac{1}{x}$ passemos a analisar o fato de que: quando x tende a $zero$ pela esquerda a função $h(x)$ decresce de forma ilimitada. E representa-se este comportamento de maneira simbólica e mais precisa como se segue:

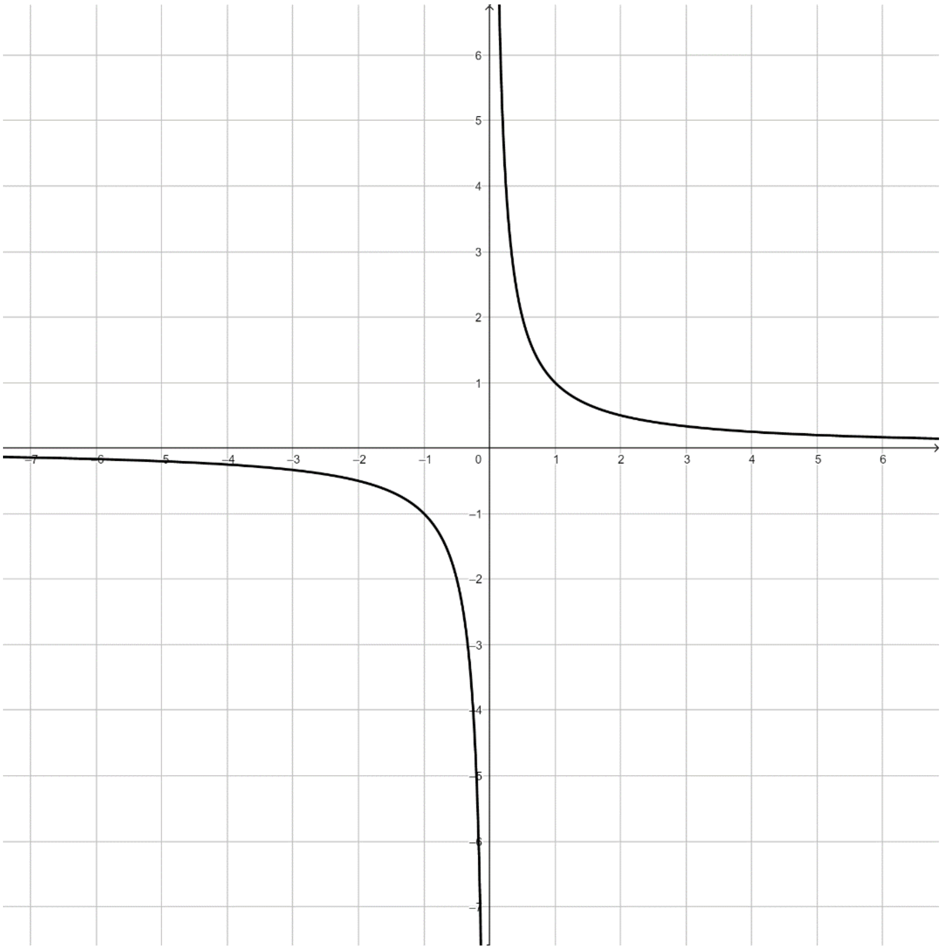
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

De maneira análoga, porém contrária, quando x tende a zero pela direita a função $h(x) = \frac{1}{x}$ cresce de forma ilimitada. E pode-se descrever este comportamento da maneira a seguir:

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$$

Podemos visualizar com facilidade os dois comportamentos que acabamos de mencionar através do gráfico a seguir:

Figura 4



Fonte: O próprio autor (Barreto, 2022)

Para finalizar este tópico, vamos analisar o comportamento da função $f(x) = \frac{1}{x+1}$, nos preocupando em saber o que acontece com esta função quando x tende ao infinito (positivo). Ou seja, tornando os valores de x cada vez maiores e de maneira ilimitada, qual a tendência assumida pelos valores da imagem da função?

Observe-se que à medida que x cresce a soma $x + 1$ também cresce, e isso faz com que o quociente $\frac{1}{x+1}$ torne-se progressivamente menor, aproximando-se cada vez mais de zero. Então pode-se dizer que quando x tende ao infinito a função $f(x) = \frac{1}{x+1}$ tende a zero. Nesse caso pode-se dizer também de forma equivalente que *o limite dessa função no infinito é zero*.

A tabela 7 a seguir nos dá uma ideia dessa tendência:

Tabela 7

x	1	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	$1/2$	$1/11$	$1/101$	$1/1001$	$1/10001$	$1/100001$

Observa-se na tabela 7 acima que quanto mais aumentamos o valor de x, o valor da função é sempre uma fração cujo numerador é fixo e igual 1, já que o numerador não depende da variável x, mas o denominador que depende do valor de x fica cada vez maior, tornado assim o resultado final em um valor que vai se aproximando cada vez mais de zero.

Impulsionadas pelo pensamento descrito acima vamos definir o que se segue:

Definição: Seja f uma função definida no intervalo aberto $]a, +\infty[$. Dizemos que, quando x cresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se, $\varepsilon > 0$ $existe$ $N > 0$ tal que se $x > N \quad \rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

Ainda considerando a função $f(x) = \frac{1}{x+1}$, e de forma semelhante ao raciocínio anterior, quando x tende ao infinito (negativo) a soma $x + 1$ resulta num valor negativo e a função $f(x) = \frac{1}{x+1}$ tende a zero. Nesse caso pode-se dizer também que o limite dessa função no infinito (negativo) é zero.

Novamente uma tabela nos ajuda a ter uma ideia dessa tendência:

Tabela 8

x	-10	-100	-1000	-10000	-100000
$f(x)$	$-{}^{1}/_{9}$	$-{}^{1}/_{99}$	$-{}^{1}/_{999}$	$-{}^{1}/_{9999}$	$-{}^{1}/_{99999}$

E para este tipo de comportamento introduzimos a definição a seguir:

Definição: Seja f uma função definida no intervalo aberto $]-\infty, a[$. Dizemos que, quando x decresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se, $\varepsilon > 0$ $existe\ N < 0\ tal\ que\ se\ x < N \quad \rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

1.6 – LIMITE E CONTINUIDADE

Nosso objetivo neste tópico é tratar de forma breve sobre a continuidade das funções e da relação entre continuidade e limite, que como veremos mais adiante é bem estreita. Como já falamos desde o início deste capítulo a respeito dos limites, vamos então redobrar nossa atenção para a questão da continuidade. Pretendemos analisar aqui a continuidade tanto do ponto de vista intuitivo, quanto do formal. E também vamos nos valer tanto da linguagem algébrica como da visualização gráfica para um melhor entendimento.

Vamos começar como sugere (GUIDORIZZI, 2013) observando os gráficos de duas funções f e g a seguir:

Figura 5

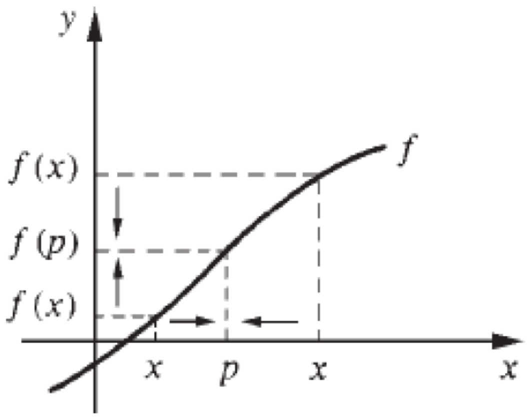
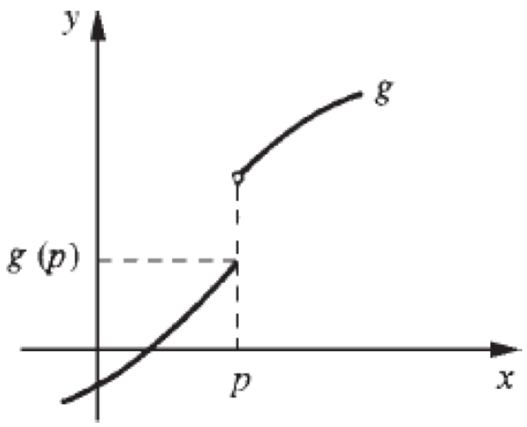


Figura 6



Observe que no ponto p o gráfico da função f (figura 5) não apresenta "salto", isto é, podemos desenhar o gráfico da função f na vizinhança de p de uma única vez, sem interrupções. O mesmo não ocorre obviamente com o gráfico da função g (figura 6), que apresenta um salto no ponto p e cujo gráfico não poderia ser desenhado na vizinhança correspondente ao ponto p de uma única vez, pois há uma interrupção exatamente na imagem de p.

Feitas estas considerações é intuitivo esperar então que na Matemática a função f seja considerada contínua e a função g não seja considera contínua. E nesse caso, a função g é dita descontínua.

Vale a pena mencionar aqui que observando o gráfico da função g nota-se que existe a imagem do ponto p, ou seja, existe $g(p)$. Isso nos da a percepção de que mesmo que a função esteja definida no ponto em questão, não há garantia de que ela seja contínua. Além disso, pode-se também notar facilmente que os limites laterais da função g em relação ao ponto p são diferentes, exatamente por causa do salto que ela apresenta nesse ponto. E o fato de os limites laterais serem diferentes, indica que a função g tem possui limite no ponto p.

Agora, olhando para o gráfico da função f, é trivial perceber que a função f está definida em p, que os limites laterais em relação a p são iguais, e que o valor deste limite corresponde exatamente a $f(p)$.

Com estas considerações podemos então enunciar uma definição para função contínua que, como já vamos constatar, tem relação direta com a própria definição de limite.

Definição (GUIDORIZZI, 2013): Uma função f é dita contínua em um ponto p do seu domínio quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (com δ dependendo de ε), tal que para todo x pertencente ao domínio de f,

$$p - \delta < x < p - \delta \quad \rightarrow \quad f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon$$

Utilizando a notação de módulo e as simbologias correspondentes para a definição acima, podemos escrever que:

$$f \ contínua \ em \ p \ \leftrightarrow \ \forall \ \varepsilon > 0, \exists \ \delta > 0 \ tal \ que \ se \ |x - p| < \delta \ \rightarrow \ |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

Fazemos questão ainda de definir novamente a continuidade de uma função em um ponto usando as notações encontradas nos livros dos professores James Stewart e Jelson Iezzi, como está descrito a seguir:

Definição: Uma função f é contínua em um ponto p do seu domínio quando

$$\lim_{n \to p} f(x) = f(p)$$

Como podemos perceber claramente na escrita acima a continuidade é definida em termos de limite. E mais, da definição acima fica subentendido que para que a função f seja contínua tem que acontecer simultaneamente três coisas:

1º) f tem que estar definida em p (ou seja, tem que existir $f(p)$);

2º) $\lim_{n \to p} f(x)$ tem que existir;

3º) $\lim_{n \to p} f(x) = f(p)$ (isto é, o limite deve ser igual à imagem no ponto p)

Segundo (STEWART, p. 109) a definição acima está nos informando que se a função f for contínua no ponto p, então $f(x)$ tende a $f(p)$ quando x tende a p.

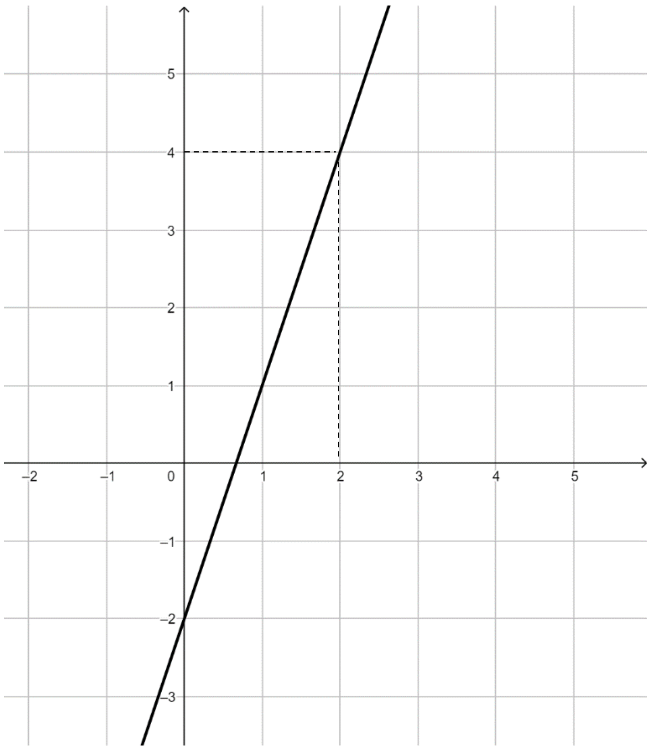
É importante não deixar passar desapercebida aqui uma diferença sutil entre a definição de limite e a definição de função contínua (que é feita em termos de limite): quando escrevemos a expressão $0 < |x - p| < \delta$, usada na definição de limites, estamos dizendo que a diferença entre os pontos representados por x e por p é menor que o número positivo δ porém não é nula (igual a zero). Daí a necessidade de escrever que $0 < |x - p|$. Isso significa que x e p podem se tornar tão próximos quanto quisermos, mas não coincidentes. Mas quando definimos a continuidade em um ponto apenas escrevemos que $|x - p| < \delta$. E isto significa que x e p podem coincidir. E é exatamente o que acontece na definição de continuidade, não só a função se aproxima de um determinado valor (o limite, nesse caso) como esse valor quando x coincidir com p deverá ser igual a própria imagem do ponto p.

Quando uma função é contínua em todos os pontos do seu domínio dizemos simplesmente que essa função é contínua. Mas é possível também termos funções que são contínuas apenas em uma ou mais partes do seu domínio. Nesse caso diremos que f é $uma\ função\ contínua\ em\ A \subset D_f$ se f for contínua em cada ponto de A.

Vamos usar alguns exemplos gráficos para explicitar casos em que a função é ou não contínua, tentando explicar o que está de acordo ou em desacordo com as definições de continuidade feitas acima.

Exemplo 1: Dada a função $f(x) = 3x - 2$ analisemos, para efeito deste exemplo, sua continuidade no ponto $x = 2$, usando o gráfico abaixo.

Figura 7



Fonte: O próprio autor (Barreto, 2022)

Mesmo que de maneira um pouco mais intuitiva do que precisa, podemos perceber do gráfico acima (figura 7) que a função $f(x) = 3x - 2$ é contínua no ponto $x = 2$. E não apenas isso, percebe-se ainda que de maneira informal, que a função dada é contínua em todo o seu domínio, que nesse caso é o conjunto dos números reais. Sabendo que a função $f(x) = 3x - 2$ é uma função polinomial de 1º grau, que seu gráfico, portanto, é uma reta, e apenas observando o trecho do gráfico que foi exposto acima, temos elementos suficientes para ficar com a sensação de que esta função é contínua em todo o seu domínio (que nesse caso é o conjunto dos números reais).

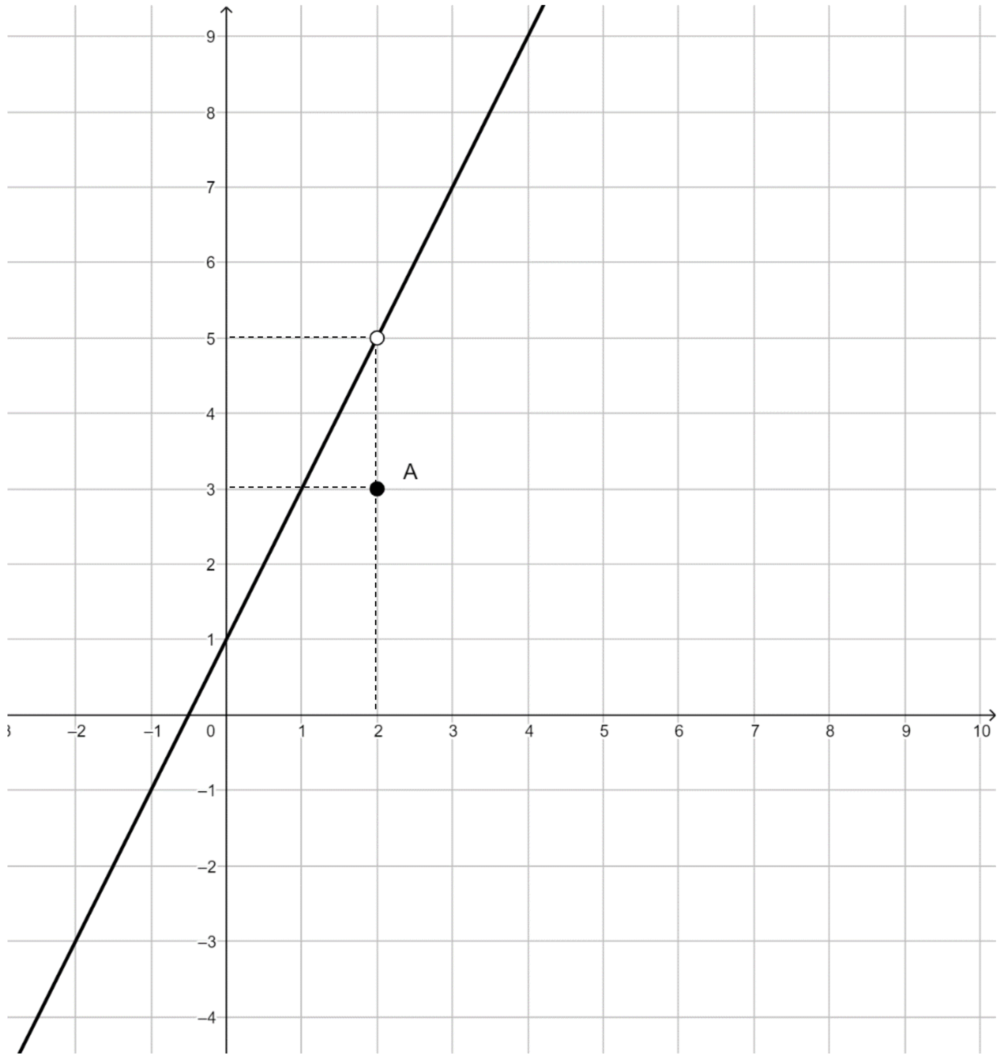
Observe-se do nosso exemplo que a função f está definida no ponto $x = 2$ (ou seja, $f(2)$ existe), e que o limite de f quando x tende a 2 corresponde à imagem de f para $x = 2$. Isto é,

$$\lim_{x \to 2}(3x - 2) = f(2) = 4$$

Conclusão, a função $f(x) = 3x - 2$ é contínua em $x = 2$.

Exemplo 2: Dada a função $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & se\ x \neq 2 \\ 3 & se\ x = 2 \end{cases}$ analisemos, para efeito deste exemplo, sua continuidade no ponto $x = 2$, usando o gráfico seguinte:

Figura 8



Fonte: O próprio autor (Barreto, 2022)

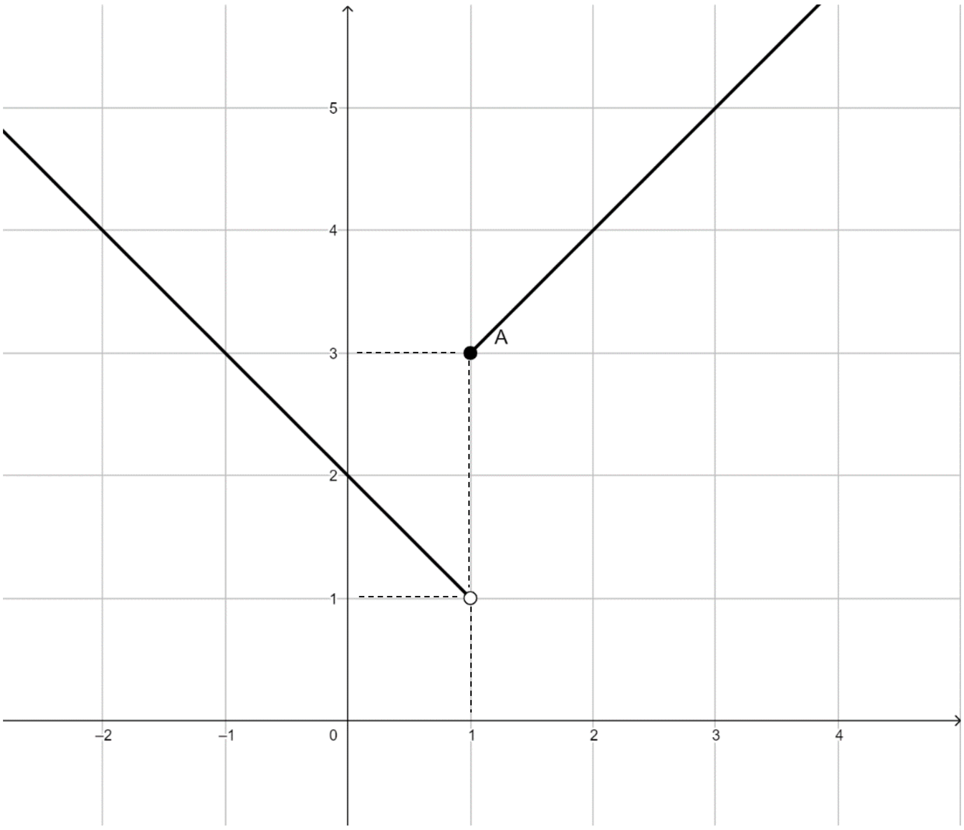
Observa-se no gráfico acima (figura 8) que o ponto $A(2,3)$ pertence ao gráfico da função f, pois para $x = 2$ temos o valor 3 associado. Ou seja, $f(2) = 3$ e, portanto, a função f está definida no ponto $x = 2$. Entretanto o limite da função no ponto $x = 2$ é 5. Isto é, apesar de a função estar bem definida no ponto em questão, sua imagem é diferente do limite nesse ponto. Resumindo isto, temos:

$$\left.\begin{array}{c} f(2) = 3 \\ e \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$$

Conclusão: a função f não é contínua no ponto $x = 2$.

Exemplo 3: Dada a função $f(x) = \begin{cases} x + 1 \; se \; x \geq 1 \\ -x + 1 \; se \; x < 1 \end{cases}$ vejamos seu gráfico.

Figura 9



Fonte: O próprio autor (Barreto, 2022)

Como podemos notar facilmente o gráfico acima (figura 9) apresenta um salto em $x = 1$. Isso faz com que os limites laterais nesse ponto sejam diferentes. Observe que

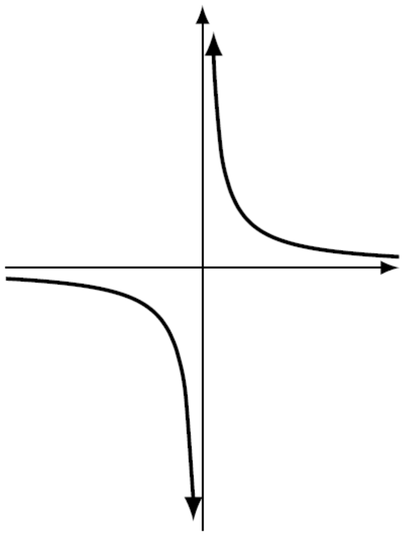
$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 \\ e \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Portanto, como os limites laterais para $x = 1$ são diferentes então não existe o limite de f para esse ponto (não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$) e assim, a função f deste exemplo é descontínua em $x = 1$.

Apesar disto, vale a pena ratificar que a função f está definida em $x = 1$, pois para esse caso temos $f(1) = 3$. A função simplesmente é descontínua porque o limite não existe, diferentemente do exemplo anterior, no qual o limite existia, mas era diferente da imagem da função no ponto em questão.

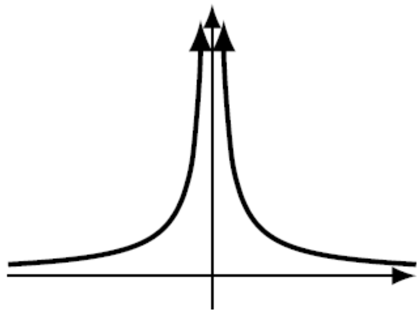
Exemplo 4: Neste exemplo vamos analisar de uma só vez os gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{x^3}$ e $f(x) = \frac{1}{x^2}$, representados pelas figuras 1.6.6 e 1.6.7 respectivamente.

Figura 10



Fonte: O próprio autor (Barreto, 2022)

Figura 11



Fonte: O próprio autor (Barreto, 2022)

Nas figuras 10 e 11 acima temos o caso de limites infinitos para o ponto $x = 0$.

Na figura 10 os limites laterais são diferentes, pois à esquerda é igual a $-\infty$ e à direita é igual a $+\infty$, portanto $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe; já na figura 11 os limites laterais são ambos iguais a $+\infty$, e portanto, $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Entretanto, apesar de termos falado sobre a questão desses limites serem infinitos e serem iguais ou diferentes não interfere no fato de que funções que possuem limites infinitos para x tendendo a um valor p não são contínuas em $x = p$.

CAPÍTULO 2 – DERIVADA

Neste Capítulo, voltado ao estudo dos conceitos de derivada, perceberemos aos poucos que a ideia central que gira em torno do conceito de derivada pressupõe o conhecimento prévio e a aplicação dos conceitos de limite, que estudamos no capítulo anterior. Mais à frente voltaremos a falar disso, entretanto podemos adiantar que a derivada é na verdade um tipo de limite.

O objetivo deste trabalho não é o aprofundamento exagerado sobre os conceitos relacionados à derivada, contudo, vale ressaltar que autores como os que citamos nesta bibliografia consideram a derivada como o limite mais importante na Matemática.

Uma das questões fundamentais aqui é o fato de que a derivada possui uma vasta quantidade de aplicações, tanto na própria Matemática, como em outras áreas do conhecimento, como já citamos na introdução deste Trabalho. Portanto já que a derivada é um conceito definido sobre outro conceito, que é o de limite, fez-se necessário antes de entrarmos propriamente no estudo da derivada um estudo cuidadoso sobre limites, de modo a conhecer de perto a ideia, o conceito em si, as propriedades básicas, e os limites fundamentais da Matemática.

Feito um apanhado básico sobre limites no capítulo anterior podemos antão nos sentir mais seguros para ingressar no estudo da derivada, tanto no que diz respeito à definição em si, quanto às suas propriedades, e também como veremos no último capítulo, em relação às suas aplicações.

Depois de observada a sugestão dos autores que usamos neste trabalho entendemos que seria uma boa escolha começar o estudo da derivada com o problema da reta tangente, do qual falaremos na sequência.

2.1 – O PROBLEMA DA RETA TANGENTE E A DERIVADA

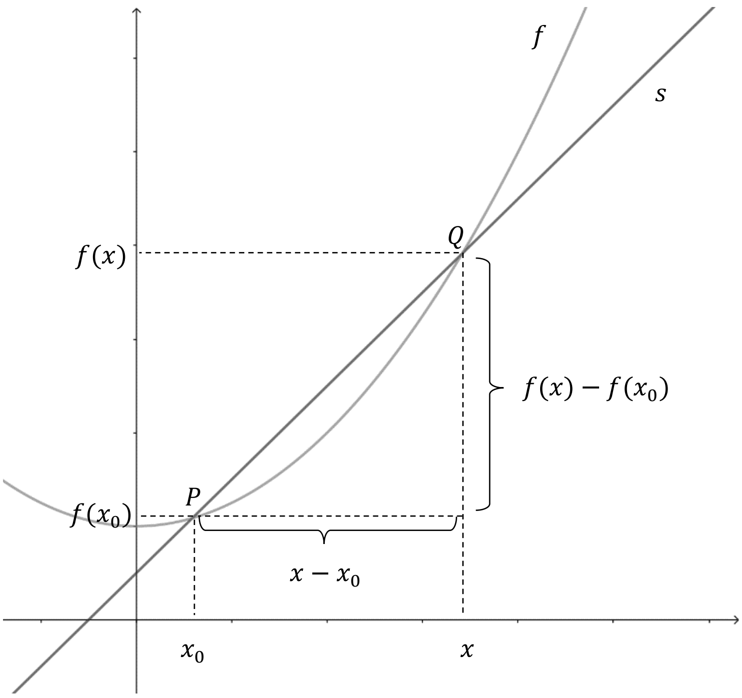
É sabido da Geometria Analítica que uma das maneiras para determinar a equação de uma reta é conhecer um ponto da reta e o coeficiente angular dela. Dessa maneira é possível calcular o coeficiente angular da reta em questão da mesma forma como se faz em qualquer livro de ensino médio.

Contudo se conhecemos apenas um ponto da reta, mas não temos o coeficiente angular dela, precisaríamos conhecer mais um ponto para poder calcular o coeficiente angular e daí determinar a equação da reta. Portanto o problema de determinar a equação da reta tangente ao gráfico de uma função gira em torno de determinar seu coeficiente angular primeiro, o que pode parecer uma tarefa não tão difícil, mas que é na verdade, complicadíssima se pensarmos nos conhecimentos tradicionais de geometria analítica.

Isso porque se já conhecemos o ponto de tangência, que pertence à curva e a reta, quando determinarmos o coeficiente angular então o problema estará resolvido, já que bastaria usar o ponto conhecido e o coeficiente angular para determinar a equação da reta em questão. Mas daí vem a pergunta: como determinar o tal coeficiente angular conhecendo apenas um ponto de uma reta?

E justamente pensando em uma maneira de resolver esse impasse vamos considerar inicialmente a figura 12 a seguir, na qual tem-se uma reta s que é secante à curva que representa o gráfico de alguma função f contínua. Nesse caso a reta terá dois pontos em comum com o gráfico de f, que aqui designaremos por $P\big(x_0, f(x_0)\big)$ e $Q\big(x, f(x)\big)$. Conhecendo esses dois pontos da reta s onde ela intersecta o gráfico de f podemos determinar seu coeficiente angular, que está representado por α e, por conseguinte, é possível determinar também a equação de s.

Figura 12



Fonte: O próprio autor (Barreto, 2022)

Considerando que a reta s forma um ângulo α com o eixo das abscissas, seu coeficiente angular que indicaremos por m_s será dado por:

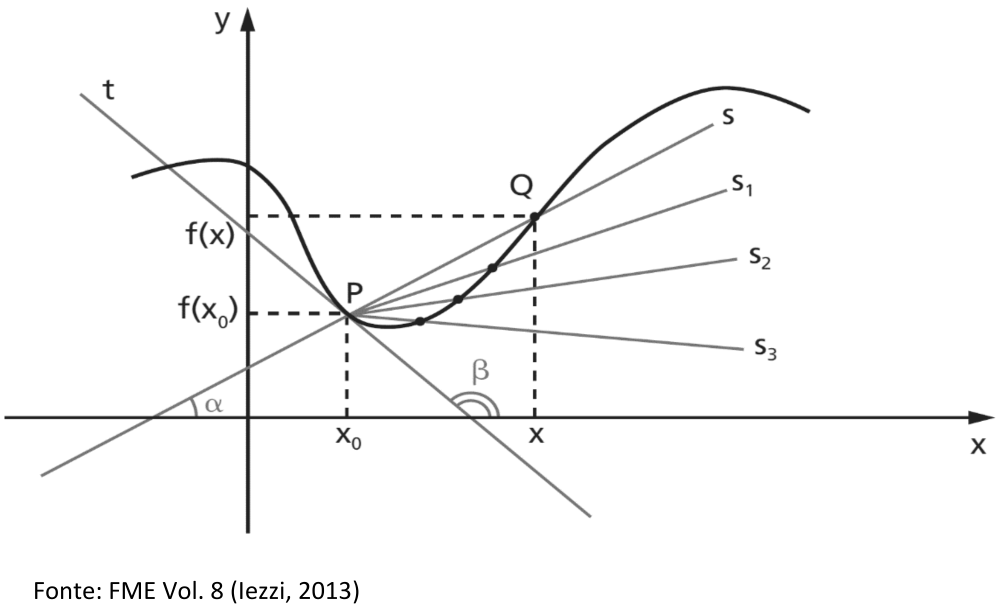
$$m_s = tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

onde:

- A diferença $x - x_0$ chamaremos de **acréscimo** ou **incremento da variável x** em relação ao ponto x_0, e indicaremos por Δ_x;
- A diferença $f(x) - f(x_0)$ chamaremos de **acréscimo** ou **incremento da função f** em relação ao ponto x_0, e indicaremos por Δ_y;
- O quociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ chamaremos de **razão incremental de f** em relação ao ponto x_0, e indicaremos por $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$.

Observe agora na figura 13 abaixo novamente a reta s secante ao gráfico de f nos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$ como havíamos mostrado anteriormente, as retas $s_1, s_2, s_3, \ldots$ e finalmente a reta t, que é a reta tangente ao gráfico de f e da qual queremos determinar o coeficiente angular.

Figura 13



Fonte: FME Vol. 8 (Iezzi, 2013)

Como admitimos que a função f é contínua, fazendo x tender a x_0 o ponto Q se desloca sobre o gráfico de f se aproximando do ponto P, e além disso, $f(x)$ também tende a $f(x_0)$. À medida que isto ocorre, a reta s vai assumindo sucessivamente as posições $s_1, s_2, s_3, \ldots$ tendendo a coincidir com a reta t, que é a reta tangente à curva no ponto P.

Nesta situação limite o coeficiente angular da reta s tende a se tornar numericamente tão próximo do coeficiente angular da reta t que podemos admitir o coeficiente angular de s como sendo o próprio coeficiente angular de t, que representaremos por m_t. Então podemos escrever que:

$$m_t = m_s = tg\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

O limite acima, quando existe e é finito, é denominado **derivada** da função f no ponto x_0, e corresponde exatamente ao coeficiente angular da reta tangente à função f no ponto de coordenadas $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Observe que a ideia usada aqui gira em torno de que não podendo calcular diretamente o coeficiente angular da reta tangente, calcula-se primeiramente o coeficiente angular de uma reta secante que passe pelo mesmo ponto que a reta tangente, e a seguir aplica-se o limite fazendo com que o coeficiente angular da reta secante tenda a coincidir com o coeficiente angular da reta tangente.

Em outras palavras, calcular a derivada de uma função em um ponto dado envolve calcular o limite para valores diferentes desse ponto mas tendendo a ele. Em nossa ilustração acima pensamos em x tendendo a x_0 pela direita, mas sem perda de generalidade isso ocorre nos dois sentidos (com x tendendo a x_0 pela esquerda e pela direita), pois estamos falando do cálculo de um limite.

Se estivéssemos interessados apenas em calcular um limite qualquer não seria necessário que a função fosse contínua no ponto em questão. Admitimos a continuidade porque o ponto de tangência deve pertencer simultaneamente à reta tangente e á curva que representa o gráfico da função. E, portanto, a função deve ser contínua no ponto considerado.

Feitas estas considerações então, vamos definir a derivada de uma função em um ponto como sugere (GUIDORIZZI, p. 216).

Definição: Sejam f uma função e x_0 um ponto do seu domínio. A *derivada* de f em x_0, indicada por $f'(x_0)$ é o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

quando este limite existir e for finito.

O símbolo $f'(x_0)$ deve ser lido como $f\ linha\ de\ x_0$, e representa a derivada da função f no ponto x_0.

Outras formas equivalentes de representar a derivada segundo (IEZZI, p. 128) e (GUIDORIZZI, p. 216) são:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} \quad \text{ou} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta_y) - f(x_0)}{\Delta_x} \quad \text{ou} \quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - f(x)}{h}$$

Diremos que f é *derivável* (ou *diferenciável*) em um subconjunto A do seu domínio se for derivável em cada ponto de A. Quando dissermos simplesmente que a função é f derivável, significa que f é derivável em cada ponto do seu domínio.

Olhando para a definição acima percebemos que assim como ocorreu com a definição de continuidade, a derivada é definida em termos de limite. Na verdade, a derivada é um tipo especial de limite. Daí a necessidade de se fazer um estudo sobre limites atento a todos os detalhes da definição e suas consequências.

Até o momento resolvemos parte do nosso problema inicial, que é o de determinar a equação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto. Isto porque a equação acima já nos fornece o coeficiente angular da reta tangente, que corresponde à derivada da função no ponto em questão.

Sendo então $f'(x_0)$ o coeficiente angular da reta tangente à função f no ponto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ a equação que estamos procurando será dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Agora sim nosso problema está resolvido pois finalmente conseguimos uma expressão para a equação da reta tangente. E para tal utilizamos a derivada da função no ponto de tangência. E neste momento vale a pena ressaltar que a derivada é por definição um tipo de limite, e este limite "coincidentemente" corresponde ao coeficiente angular da reta tangente.

2.2 – DERIVADA DAS FUNÇÕES ELEMENTARES

Como a derivada é por definição um tipo de limite já podemos nos adiantar em dizer que a priori as mesmas regras básicas válidas para limites também têm validade para o caso das derivadas. É o que mostraremos ao longo deste capítulo mas que de antemão já será utilizado implicitamente nos raciocínios que se seguem.

Vamos começar então com o conceito de **função derivada** e, a seguir mostrar as derivadas das principais funções estudadas na educação básica.

Segundo (IEZZI, p. 135) se uma função f é derivável num intervalo aberto, e a derivada em cada ponto de abscissa x_0 nesse intervalo é dada por um limite, que é único como já estudado no capítulo anterior sobre limites, então é possível definir uma **função derivada de $\boldsymbol{f}$**.

Neste caso, a $\boldsymbol{fun}$ção $\boldsymbol{o\ derivada\ de\ f}$ é a função $f': I \to R$, que associa a cada $x_0 \in I$ a derivada de f no ponto x_0.

Caso se queira é comum representar a derivada de f por $\frac{d_f}{d_x}$ ou por D_f.

1º) Derivada da função constante

Dada a função $f(x) = c$, $c \in R$, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$$

Isto é, a derivada da função constante é igual a zero.

Daí: se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$.

2º) Derivadas de $\boldsymbol{x^n}$ e de $\boldsymbol{\sqrt[n]{x}}$

Seja n um natural não nulo. Então valem as seguintes fórmulas de derivação:

a) $f(x) = x^n \ \to \ f'(x) = n \cdot x^{n-1}$;

b) $f(x) = x^{-n} \ \to \ f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$, com $x \neq 0$;

c) $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$, com $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar $(n \geq 2)$.

Demonstrações

a) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x-x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}{x_0}^2 + \cdots + {x_0}^{n-1})$

Como $x \to x_0$ e na soma acima temos um total de n parcelas, então:

$f'(x_0) = ({x_0}^{n-1} + {x_0}^{n-1} + {x_0}^{n-1} + \cdots + {x_0}^{n-1}) = n \cdot {x_0}^{n-1}$

isto é,

$f'(x_0) = n \cdot {x_0}^{n-1}$ ou $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ como queríamos demonstrar.

b) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^{-n} - {x_0}^{-n}}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{{x_0}^n}}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\frac{{x_0}^n - x^n}{x^n \cdot {x_0}^n}}{x-x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} -\frac{x^n - {x_0}^n}{x-x_0} \cdot \frac{1}{x^n \cdot {x_0}^n}$

Como já foi verificado no item a) que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x-x_0} = n \cdot x^{n-1}$, e além disso, quando $x \to x_0$ tem-se que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{x^n \cdot {x_0}^n} = \frac{1}{{x_0}^{2n}}$, resulta que

$f'(x_0) = -n \cdot {x_0}^{n-1} \cdot \frac{1}{{x_0}^{2n}} = -n \cdot {x_0}^{-n-1}$ ou simplesmente $\boldsymbol{f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}}$

c) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x-x_0}$

Fazendo $u = \sqrt[n]{x}$ e $v = \sqrt[n]{x_0}$ e levando em conta que $x \to x_0$ tem-se que $u \to v$, segue que

$$f'(x_0) = \lim_{u \to v} \frac{u-v}{u^n - v^n} = \lim_{u \to v} \frac{1}{\frac{u^n - v^n}{u-v}} = \lim_{u \to v} \frac{1}{n \cdot v^{n-1}}$$

Daí, considerando $x_0 \neq 0$,

$$f'(x_0) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{{x_0}^{n-1}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{{x_0}^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot {x_0}^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot {x_0}^{\frac{1}{n}-1}$$

Logo conclui-se que $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}}$.

3º) Derivadas de $\boldsymbol{a^x}$ e de $\boldsymbol{ln\ x}$

Demonstrações

No que se segue usaremos como base os raciocínios encontrados (IEZZI, p. 138) e (GUIDORIZZI, p. 232).

a) Dada a função $f(x) = a^x$, com $a \in R$ e $0 < a \neq 1$, sua derivada será:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

Como a parcela a^x não depende de h, isto é, a^x funciona como uma constante, podemos extraí-la do limite e reescrever assim:

$$f'(x) = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot ln\ a$$

Portanto,

$$\boldsymbol{f'(x) = a^x \cdot ln\ a}$$

Quanto a esta última demonstração há uma ressalva! Ainda não provamos o fato de que $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = ln\ a$

b) Dada a função $g(x) = ln\, x$, com $x > 0$, vamos provar que $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Segue-se que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{ln(x+h) - ln\, x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot ln\, \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

Promovendo a mudança $u = \frac{h}{x}$ teremos

$$g'(x) = \lim_{u \to 0} \frac{1}{ux} \cdot ln\, (1 + u) = \lim_{u \to 0} ln\, (1 + u)^{\frac{1}{ux}} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{x} ln\, (1 + u)^{\frac{1}{u}}$$

Como $\lim_{u \to 0} ln\, (1 + u)^{\frac{1}{u}} = 1$ e $\lim_{u \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ ficamos com

$$g'(x) = \lim_{u \to 0} \frac{1}{x} ln\, (1 + u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

E finalmente podemos concluir que

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

Portanto reafirmamos que $\boldsymbol{se\ g(x) = ln\, x\ ent}$**ã**$\boldsymbol{o\ g'(x) = \frac{1}{x}}$.

4º) Derivada das funções trigonométricas

a) $sen'x = cos\, x$

Demonstração

Aplicando a definição de derivada e em seguida uma transformação trigonométrica teremos a seguinte sequência:

$$sen'x = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2sen\frac{h}{2}\, cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} cos\, \left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

Como $\lim_{h \to 0} \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ e $\lim_{h \to 0} cos\, \left(\frac{2x+h}{2}\right) = \cos x$ segue que

$$sen'x = \lim_{h \to 0} \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} cos\, \left(\frac{2x+h}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x$$

Ou seja,

$$\boldsymbol{sen'x = \cos x}$$

b) $\cos' x = -sen\, x$

Demonstração

Novamente usamos a definição de derivada seguida de uma transformação trigonométrica. E a sequência ficará assim:

$$\cos' x = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2sen\frac{h}{2}\,sen\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,sen\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

Como $\lim_{h\to 0} -\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -1$ e $\lim_{h\to 0} sen\left(\frac{2x+h}{2}\right) = \operatorname{sen} x$ segue que

$$cos' x = \lim_{h\to 0} -\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,sen\left(\frac{2x+h}{2}\right) = -1\cdot \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

Ou seja,

$$\boldsymbol{cos' x = -\mathbf{sen}\, x}$$

c) $tg' x = sec^2 x$

Demonstração

$$\operatorname{tg}' x = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg} x}{h}$$

Fazendo $t = x + h$ ($t \to x$ quando $h \to 0$)

$$\operatorname{tg}' x = \lim_{t\to x}\frac{\operatorname{tg} t-\operatorname{tg} x}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\operatorname{sen} t\cos x-\operatorname{sen} x\cos t}{t-x}\cdot\frac{1}{\cos t\cos x}$$

Como

$$\lim_{t\to x}\frac{\operatorname{sen} t\cos x-\operatorname{sen} x\cos t}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\operatorname{sen}(t-x)}{t-x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to x}\frac{1}{\cos t\cos x} = \frac{1}{cos^{\,2} x}$$

Resulta que

$$\boldsymbol{\mathbf{tg}' x = sec^2 x}$$

d) $\sec' x = \sec x\ .\operatorname{tg} x$

Demonstração

$$\sec' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{\mathrm{h}\cos(x+h)\cos x}$$

Aplicando a transformação trigonométrica

$\cos a - \cos b = -2sen\left(\frac{a+b}{2}\right) sen\left(\frac{a-b}{2}\right)$, onde $a = x$ e $x + h = b$ vem

$$\sec' x = \lim_{h\to 0} \frac{-2\operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{-h}{2}\right)}{\mathrm{h}\cos(x+h)\cos x}$$

Como $\operatorname{sen} -x = -\operatorname{sen} x$ segue que

$$\sec' x = \lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\mathrm{h}\cos(x+h)\cos x} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{\mathrm{h}}{2}\cos(x+h)\cos x}$$

Arrumando convenientemente a expressão acima teremos

$$\sec' x = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{\mathrm{h}}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\cos(x+h)\cos x} = 1 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

Donde concluímos que

$$\boldsymbol{\sec' x = \operatorname{tg} x \cdot \sec x}$$

e) $\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$

Demonstração

$$\operatorname{cotg}' x = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{cotg}(x+h) - \operatorname{cotg} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cos(x+h)}{\operatorname{sem}(x+h)} - \frac{\cos(x)}{\operatorname{sem} x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x\cos(x+h) - \operatorname{sen}(x+h)\operatorname{sen} x}{\mathrm{h}\operatorname{sen}(x+h)\operatorname{sen} x}$$

Lembrando agora da transformação trigonométrica

$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a\cos b - \operatorname{sen} b\cos a$ e admitindo $a = x$ e $b = x + h$ poderemos escrever

$$\text{cotg}' x = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x-(x+h))}{\text{h sen}(x+h)\,\text{sen}\,x} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(-h)}{\text{h sen}(x+h)\,\text{sen}\,x} = \lim_{h\to 0} -\frac{\text{sen}\,h}{\text{h sen}(x+h)\,\text{sen}\,x}$$

Agrupando convenientemente a expressão acima ficará

$$\text{cotg}' x = \lim_{h\to 0} -\frac{\text{sen}\,h}{\text{h}} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{\text{sen}(x+h)\,\text{sen}\,x} = -1 \cdot \frac{1}{\text{sen}^2 x} = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}$$

Logo,

$$\mathbf{cotg}' \boldsymbol{x} = -\,\mathbf{cosec}^{\mathbf{2}}\, \boldsymbol{x}$$

f) $\text{cosec}' x = -\,\text{cosec}\,x \cdot \text{cotg}\,x$

Demonstração

$$\text{cosec}' x = \lim_{h\to 0} \frac{\text{cosec}(x+h) - \text{cosec}\,x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\text{sen}(x+h)} - \frac{1}{\text{sen}\,x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\,x - \text{sen}(x+h)}{\text{h sen}(x+h)\,\text{sen}\,x}$$

Aplicando a transformação trigonométrica

$\text{sen}\,a - \text{sen}\,b = 2sen\left(\frac{a-b}{2}\right) cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, onde $a = x$ e $x + h = b$ vem

$$\text{cosec}' x = \lim_{h\to 0} \frac{2\text{sen}\left(\frac{-h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\text{h sen}(x+h)\,\text{sen}\,x}$$

Como $\text{sen} -x = -\,\text{sen}\,x$ segue que

$$\text{cosec}' x = \lim_{h\to 0} \frac{-\,\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\frac{\text{h}}{2}\,\text{sen}(x+h)\,\text{sen}\,x}$$

Arrumando convenientemente a expressão acima teremos

$$\text{cosec}' x = \lim_{h\to 0} -\frac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{\text{h}}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\text{sen}(x+h)\,\text{sen}\,x} = -1 \cdot \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\text{sen}\,x} \cdot \frac{1}{\text{sen}\,x}$$

Donde concluímos que

$$\mathbf{cosec}' \boldsymbol{x} = -\,\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{cosec}\,\boldsymbol{x}$$

2.3 – DERIVADA E CONTINUIDADE

Tanto a derivada como a continuidade são definidas em termos de limites. Portanto é de se esperar intuitivamente que haja alguma relação entre ambas de modo que a existência da derivada implique a continuidade ou vice-versa, podendo inclusive ocorrer a implicação nos dois sentidos. É o que trataremos a seguir.

Vamos começar analisando um exemplo encontrado em (GUIDORRIZI, p. 221) que sugere o enunciado abaixo:

Exemplo: Mostre que $f(x) = |x|$ não é derivável em $x_0 = 0$.

Solução

Aplicando a definição de deriva vem

$$\mathrm{f}'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Aqui basta observar que $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1, se\ x < 0 \\ 1, se\ x > 0 \end{cases}$

Portanto o limite acima não existe, já que os limites laterais à esquerda e à direta são diferentes e cujos valores são dados por

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

Neste exemplo específico, como podemos ver no gráfico abaixo, o motivo da função não admitir reta tangente no ponto $\left(0, f(0)\right)$ é que nesse ponto a função apresenta um "bico". Podemos entender a expressão "bico" como sendo uma mudança brusca de direção no traçado do gráfico da função, e chamamos para isto na Matemática de **ponto de inflexão**. Todavia não entraremos em mais detalhes técnicos aqui, já que nosso objetivo com este exemplo é obter a conclusão que vem a seguir.

A conclusão a que nos leva este exemplo simples, conforme explicado em (GUIDORRIZI, p. 236) é que *uma função pode ser contínua em um ponto e mesmo assim não ser derivável neste ponto*. Ou, de maneira equivalente pode-se conclui que *continuidade não implica derivabilidade*. Entretanto, veremos na sequência um pequeno teorema que nos garante que o contrário é verdade: *derivabilidade implica em continuidade*.

Teorema: Se f for derivável em p, então f será contínua em p.

Demonstração

Por hipótese, f é derivável em p.

Logo $\mathrm{f}'(x) = \lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ existe.

Para provar que f é contínua em p vamos mostrar que $\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = f(p)$.

E faremos isso usando a seguinte manipulação algébrica:

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \cdot x - p, \quad \text{para } x \neq p.$$

Então

$$\lim_{x \to p}[f(x) - f(p)] = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot \lim_{x \to p} x - p = \mathrm{f}'(x) \cdot 0 = 0$$

Ou seja,

$$\lim_{x \to p}[f(x) - f(p)] = 0$$

e, por conseguinte,

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Observação: Em decorrência imediata do teorema que acabamos de provar, segue-se que se f não for contínua em p então f não poderá ser derivável em p. Devemos, entretanto, ficar atentos para um detalhe: mesmo sabendo que uma função é contínua, não poderemos afirmar que ela é derivável.

2.4 – REGRAS DE DERIVAÇÃO

As regras de derivação que veremos a seguir irão auxiliar a determinar a derivada de uma função sem que seja necessário recorrer à definição. Tentamos reunir as regras de derivação mais comuns na sequência que se sucede.

1ª) Derivada da Soma: A derivada de uma soma é igual a soma das derivadas das parcelas.

Sejam f e g funções deriváveis em p. Então $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.

Demonstração

$$(f+g)'(p) = \lim_{x \to p} \frac{[f(x)+g(x)]-[f(p)+g(p)]}{x-p} = \lim_{x \to p} \left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p} + \frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right] =$$

$$= \lim_{x \to p} \left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right] + \lim_{x \to p} \left[\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right] = f'(p) + g'(p).$$

Nesta demonstração consideramos apenas duas parcelas. Porém esse raciocínio pode ser estendido para uma quantidade qualquer de parcelas, desde que esta quantidade seja finita e que cada parcela envolvida seja uma função derivável no ponto em questão. Vejamos o argumento encontrado em (IEZZI, p. 145).

Sejam $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x)$ funções deriváveis.

E seja $f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x)$

Então $f'(x) = u_1{}'(x) + u_2{}'(x) + u_3{}'(x) + \cdots + u_n{}'(x)$

Além disso, o raciocínio empregado para a derivada da soma de funções também se aplica à diferença, bastando apenas fazer um ajuste no raciocínio anterior.

Sejam f e g funções deriváveis em p. Então $(f-g)'(p) = f'(p) - g'(p)$.

Demonstração

$$(f-g)'(p) = \lim_{x \to p} \frac{[f(x)-g(x)]-[f(p)-g(p)]}{x-p} = \lim_{x \to p} \left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p} + \frac{-g(x)+g(p)}{x-p}\right] =$$

$$= \lim_{x \to p} \left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p} - \frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right] = \lim_{x \to p} \left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right] - \lim_{x \to p} \left[\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right] = f'(p) - g'(p).$$

2ª) Derivada do Produto de uma Constante por uma Função: A derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função.

Seja f uma função derivável em p e seja k uma constante. Então $(k \cdot f)'(p) = k \cdot f'(p)$.

Demonstração

$$(k \cdot f)'(p) = \lim_{x \to p} \frac{k \cdot f(x) - k \cdot f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{k \cdot [f(x) - f(p)]}{x - p} = k \cdot \lim_{x \to p} \frac{[f(x) - f(p)]}{x - p} = k \cdot f'(p)$$

3ª) Derivada do Produto de Funções: A derivada do produto de duas funções é igual ao produto da derivada da primeira multiplicada pelo segunda mais a primeira multiplicada pela derivada da segunda.

Sejam f e g funções deriváveis em p. Então

$$(f \cdot g)'(p) = f'(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot g'(p)$$

Demonstração

$$(f \cdot g)'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(p) \cdot g(p)}{x - p}$$

$$(f \cdot g)'(p) = \lim_{x \to p} \left[\frac{f(x) \cdot g(x) - f(p) \cdot g(x)}{x - p} + \frac{f(p) \cdot g(x) - f(p) \cdot g(p)}{x - p} \right]$$

$$(f \cdot g)'(p) = \lim_{x \to p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot g(x) + f(p) \cdot \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right]$$

$$(f \cdot g)'(p) = \lim_{x \to p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot g(x) \right] + \lim_{x \to p} \left[f(p) \cdot \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right]$$

$$(f \cdot g)'(p) = \lim_{x \to p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right] \cdot \lim_{x \to p} [g(x)] + \lim_{x \to p} [f(p)] \cdot \lim_{x \to p} \left[\frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right]$$

$$(f \cdot g)'(p) = f'(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot g'(p)$$

Ainda que de maneira pouco mais complexa, pode-se estender a regra do produto para uma quantidade n qualquer de fatores, onde cada fator é uma função derivável.

Consideremos as funções $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x)$ deriváveis.

E seja $f(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot u_3(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x)$

Então

$$f'(x) = u_1{}'(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x) + u_1(x) \cdot u_2{}'(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x) + u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n{}'(x)$$

Quando ocorrer de $u_1(x) = u_2(x) = \cdots = u_n(x) = u(x)$ esta propriedade ficará com o seguinte aspecto:

$$f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1}.u'(x)$$

4ª) Derivada do Quociente: A derivada de um quociente é igual à derivada do numerador multiplicada pelo denominador menos o numerador multiplicado pela derivada do denominador, sobre o quadrado do denominador.

Sejam f e g funções deriváveis em p e $g(p) \neq 0$. Então

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot g'(p)}{[g(p)]^2}$$

Demonstração

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \lim_{x\to p} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x-p}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \lim_{x\to p} \left[\frac{f(x)g(p)-f(p)g(x)}{x-p} \cdot \frac{1}{g(x)g(p)}\right]$$

Subtraindo e somando $f(p)g(p)$ ao numerador e agrupando de forma conveniente ficaremos com a seguinte sequência

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \lim_{x\to p} \left[\frac{f(x)g(p)-f(p)g(p)+f(p)g(p)-f(p)g(x)}{x-p} \cdot \frac{1}{g(x)g(p)}\right]$$

$$= \lim_{x\to p} \left[\left[\frac{f(x)g(p)-f(p)g(p)}{x-p} + \frac{f(p)g(p)-f(p)g(x)}{x-p}\right] \cdot \frac{1}{g(x)g(p)}\right]$$

$$= \lim_{x\to p} \left[\left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \cdot g(p) - f(p) \cdot \frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right] \cdot \frac{1}{g(x)g(p)}\right]$$

$$= \lim_{x\to p} \left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \cdot g(p) - f(p) \cdot \frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right] \cdot \lim_{x\to p} \left[\frac{1}{g(x)g(p)}\right]$$

$$= \left[\lim_{x\to p} \left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \cdot g(p)\right] - \lim_{x\to p} \left[f(p) \cdot \frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right]\right] \cdot \lim_{x\to p} \left[\frac{1}{g(x)g(p)}\right]$$

$$= \left[\lim_{x\to p} \left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right] \cdot \lim_{x\to p}[g(p)] - \lim_{x\to p}[f(p)] \cdot \lim_{x\to p} \left[\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right]\right] \cdot \lim_{x\to p} \left[\frac{1}{g(x)g(p)}\right]$$

Portanto

$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = [f'(p) \cdot g(p) - f(p) \cdot g'(p)] \cdot \frac{1}{[g(p)]^2}$

E finalmente temos o resultado pretendido

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p) \cdot g(p) - f(p) \cdot g'(p)}{[g(p)]^2}$$

5ª) Derivada da Função Composta (Regra da Cadeia):

Seja $f\colon A \to B$ uma função derivável em x e dada pela lei $y = f(x)$. Seja $g\colon B \to C$ uma função derivável em $y = f(x)$ e dada pela lei $z = g(y)$. Consideremos ainda a função $F\colon A \to C$ dada pela lei $z = F(x) = g\big(f(x)\big)$.

Queremos provar que F é derivável em x e que, de acordo com a regra da cadeia sua derivara é

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x), x \in D_g$$

Demonstração

Temos inicialmente:

$\frac{\Delta_z}{\Delta_x} = \frac{\Delta_z}{\Delta_y} \cdot \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$

Notemos que, se Δ_x tende a zero ($\Delta_x \to 0$), então Δ_y também tende a zero $\big(\Delta_y \to 0\big)$, pois a função $y = f(x)$ é derivável e, portanto, contínua em x. Assim, para valores próximos de x ($\Delta_x \to 0$) a função f assume valores próximos de $y = f(x)$ $\big(\Delta_y \to 0\big)$.

Então, temos:

$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_z}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_z}{\Delta_y} \cdot \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_y \to 0} \frac{\Delta_z}{\Delta_y} \cdot \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$

Como $z = g(y)$ e $y = f(x)$ são deriváveis por hipótese, $\lim_{\Delta_y \to 0} \frac{\Delta_z}{\Delta_y}$ e $\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ são ambos finitos; portanto, $\lim_{\Delta_y \to 0} \frac{\Delta_z}{\Delta_y}$ também. Assim $z = f(x)$ é derivável e sua derivada é:

$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$

Isto corresponde a dizer que

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

6ª) Derivada da Função Inversa

Seja $y = f(x)$ uma função inversível (ou seja, bijetora) e derivável no intervalo I de modo que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Vamos provar que a função inversa $x = f^{-1}(y)$ é derivável em $f(I)$ e que $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, sendo $y = f(x)$.

Demonstração

Como f é bijetora e derivável, decorre que $\Delta_x \neq 0$ e $\Delta_y \neq 0$, e, portanto, podemos escrever:

$$\frac{\Delta_x}{\Delta_y} = \frac{1}{\frac{\Delta_y}{\Delta_x}}$$

Sendo f derivável e, portanto, contínua, se Δ_x tende a zero, então Δ_y também tende a zero. Assim temos:

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta_y \to 0} \frac{\Delta_x}{\Delta_y} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta_y}{\Delta_x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_y}{x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

Conclusão,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

7ª) Derivada da Função Logarítmica

Como a função logarítmica é a inversa da função exponencial, então podemos aplicar o que acabamos de demonstrar do subtópico anterior.

Seja $y = \log_a x$. Então $x = a^y$.

Em uma situação anterior já demonstramos que

$f(x) = a^x \quad \to \quad f'(x) = a^x \cdot ln\, a$

Utilizando a ideia de derivada da função inversa que acabamos de demonstrar podemos escrever

$y' = \frac{1}{x'}$, sendo $y' = [\log_a x]'$ e $x' = [a^y]'$

E continuando o raciocínio vem

$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{a^y \cdot ln\, a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \cdot ln\, a} = \frac{1}{x \cdot ln\, a}$

Logo,

$$y' = [\log_a x]' = \frac{1}{x} \cdot ln\, a$$

Vale aqui relembrar que já havíamos demonstrado um caso particular da derivada da função logarítmica: quando $a = e$, ou seja, quando $y = \log_a x$ e, por conseguinte $x = e^y$. Neste caso particular temos o seguinte:

$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{e^y \cdot ln\, e} = \frac{1}{e^{\log_e x} \cdot ln\, e} = \frac{1}{x \cdot ln\, e} = \frac{1}{x} \cdot ln\, e = \frac{1}{x}$

Conclusão,

$$y' = [ln\, x]' = \frac{1}{x}$$

8ª) Derivada da Função $\boldsymbol{arc\ sen}$ (ou $\mathbf{sen}^{-1}$)

A função $y = arc\ \operatorname{sen} x$, definida em $I = [-1, 1]$ com imagens em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é a inversa de $x = \operatorname{sen} y$. Sendo assim, podemos novamente aplicar a regra de derivação da função inversa.

Primeiramente vamos considerar que

$y = arc\ \operatorname{sen} x \quad \rightarrow \quad x = \operatorname{sen} y$

Já foi demonstrado anteriormente que

$x = \operatorname{sen} y \quad \rightarrow \quad x' = \cos y$

Neste ponto utilizamos a derivada da função inversa e escrevemos a sequência:

$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Daí concluímos que

$$y' = [\text{sen}^{-1} y]' = [arc\ \text{sen}\, x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

9ª) Derivada da Função $arc\ cos$ (ou $\cos^{-1}$)

A função $y = arc\ \cos x$, definida em $I = [-1, 1]$ com imagens em $[0, \pi]$, é a inversa de $x = \cos y$. E da mesma forma que fizemos no item anterior, vamos aplicar a regra de derivação da função inversa.

De início temos

$y = arc\ \cos x \quad \rightarrow \quad x = \cos y$

Já foi demonstrado anteriormente que

$x = \cos y \quad \rightarrow \quad x' = -\,\text{sen}\, y$

Neste ponto utilizamos a derivada da função inversa e escrevemos a sequência:

$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{-\,\text{sen}\, y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Conclusão,

$$y' = [\cos^{-1} y]' = [arc\ \cos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

10ª) Derivada da Função $arc\ tg$ (ou tg^{-1})

A função $y = arc\ \text{tg}\, x$, definida em R com imagens em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, é a inversa de $x = \text{tg}\, y$. E de maneira similar ao que foi feito nos dois itens anteriores vamos aplicar a regra de derivação da função inversa.

De início temos

$y = arc\ \text{tg}\, x \quad \rightarrow \quad x = \text{tg}\, y$

E lembrando de um resultado que já foi demonstrado

$x = \text{tg}\, y \quad \rightarrow \quad x' = \sec^2 y$

Então pela derivada da função inversa vem

$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\text{tg}^2\, y} = \frac{1}{1+\text{x}^2}$

Isto é,

$$y' = [\text{tg}^{-1}\, y]' = [arc\ \text{tg}\, x]' = \frac{1}{1+\text{x}^2}$$

11ª) Derivada de $\boldsymbol{f(x)^{g(x)}}$

Usando a sequência de ideias obtidas em (GUIDORIZZI, p. 278), consideremos duas funções f e g deriváveis em um mesmo conjunto A, com $f(x) > 0$ para todo $x \in A$. Seja y uma função definida em A e dada por uma lei do tipo

$$y = f(x)^{g(x)}$$

Aplicando ln aos dois membros da igualdade acima obtemos

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$$

Usando a propriedade do logaritmo de uma potência ($\log_b a^c = c \cdot \log_b a$) vem

$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$$

Daí obtemos

$$y = e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$$

Como $y = f(x)^{g(x)}$, substituindo ficará

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$$

Derivando agora os dois lados desta igualdade obtemos

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = \left[e^{g(x)\cdot \ln f(x)}\right]'$$

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = e^{g(x)\cdot \ln f(x)} \cdot [g(x) \cdot \ln f(x)]'$$

E assim concluímos que

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)} \cdot [g(x) \cdot \ln f(x)]'$$

Com esta última demonstração concluímos a relação das principais regras de derivação, as quais tínhamos a pretensão de evidenciar neste trabalho. Antes, porém de passar ao próximo tópico vamos falar de forma breve em função derivada e derivadas de ordem superior, vamos introduzir mais uma maneira de representar a derivada (conhecida como notação de Leibniz) com sua respectiva interpretação, e iremos mostrar como derivar uma função dada de forma implícita.

Função Derivada: é a função $f': A \to R$ que associa a cada $x \in A$ o número real $f'(x)$, onde A é o conjunto dos valores de x para os quais existe $f'(x)$.

Neste caso f' é chamada de *derivada de 1ª ordem de* f; e podemos também chamar f' de *1ª deriva de* f, ou ainda de *derivada 1ª de* f.

Além disso, podemos indicar a derivada de 1ª ordem de f por $f^{(1)}$. A utilidade prática desta representação para a derivada encontra-se no fato de que a derivada pode ser aplicada de forma sucessiva a uma função, ou seja, podemos derivar, depois derivar a derivada, em seguida derivar a derivada da derivada, e assim sucessivamente, e nestes casos será simples representar essas sucessivas derivadas como veremos a seguir.

Quando derivamos $f' = f^{(1)}$ obtemos $f'' = f^{(2)}$, que é a *derivada de 2ª ordem de* f. Ou seja, $f^{(2)} = f'' = (f')'$. De maneira semelhante, derivando f'' obtemos $f''' = f^{(3)}$, que é a *derivada de 3ª ordem de* f. Isto é, $f^{(3)} = f''' = (f'')'$. Podemos então perceber que a maneira mais prática de indicar, por exemplo, a $n - ézima$ derivada (ou derivada de ordem n) de uma função seria por $f^{(n)}$.

As derivadas de uma função f calculadas a partir da 2ª ordem são chamadas de $derivadas\ de\ ordem\ superior\ de\ f$.

Vamos resolver a seguir dois exemplos para ilustrar de maneira bem simplificada a aplicação das derivadas de ordem superior. Admitiremos que as funções não têm restrições quanto à possibilidade de serem derivadas mais de uma vez sucessivamente.

Exemplo 1: Dada a função $f(x) = x^5 - x^4 + 2x$, calcule f', f'' e f'''

Solução:

- $f' = 5 \cdot x^{5-1} - 4 \cdot x^{4-1} + 2 = 5x^4 - 4 \cdot x^3 + 2$

  De posse do resultado acima, derivamos f' a fim de obter f''.

- $f'' = 4 \cdot 5x^{4-1} - 3 \cdot 4x^{3-1} + 0 = 20x^3 - 12 \cdot x^2$

  Agora vamos aplicar a derivada em f'' para encontrar finalmente f'''.

- $f''' = 3 \cdot 20x^{3-1} - 2 \cdot 12x^{2-1} = 60x^2 - 24x$

Exemplo 2: Dada a função $f(x) = -2x^3 - 3x^2$, calcule $f''(5)$.

- $f' = 3 \cdot [-2x^{3-1}] + 2 \cdot [-3x^{2-1}] = -6x^2 - 6x$

  Fazendo agora a derivada de f'.

- $f'' = 3 \cdot [-6x^1] - 6 = 18x - 6$

  Para finalizar o exemplo vamos aplicar $f''(5)$. Teremos então:

- $f'' = 18x - 6$

  $f''(5) = 18 \cdot 5 - 6 = 90 - 6$

  $f''(5) = 90 - 6$

  $f''(5) = 84$

Falando agora sobre representações para a derivada, é comum representar a derivada de uma função do tipo $y = f(x)$, onde y é a variável dependente e x é a variável independente, por $\frac{dy}{dx}$ (lê-se: derivada de y em relação a x) cujo significado é derivar a função f em x. Ou seja, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Esta forma de representar a derivada é devida a Leibniz, e de acordo com a definição de derivada feita no início deste capítulo teríamos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x + \Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}$$

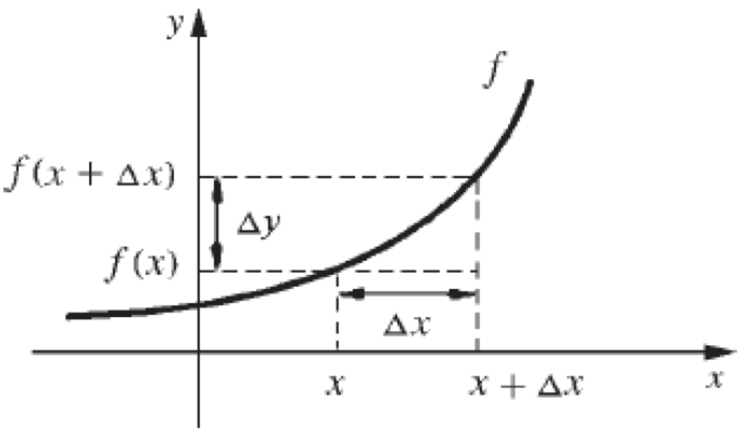
Fazendo $\Delta_y = f(x + \Delta_x) - f(x)$ podemos reescrever a expressão acima como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

que é uma representação bastante comum para a derivada.

Esta forma de representar a derivada pode ser visualizada no gráfico a seguir, retirado do livro (GUIDORIZZI, p. 252).

Figura 14



Na figura 14 acima o símbolo Δx (leia-se: delta x) desempenha o mesmo papel o h quando escrevemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Para ilustrar como se poderia escrever e calcular a derivada usando essa representação vamos resolver um exemplo.

Exemplo: Calcule a derivada de $y = 2x^4 - x^3 - x$.

Solução:

$$y = 2x^4 - x^3 - x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot 2x^3 - 3 \cdot x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 3x^2 - 1$$

No caso em que tivéssemos uma do tipo $s = f(t)$, onde, por exemplo, s fosse a variável dependente representando o espaço percorrido e t fosse a variável independente representando o tempo gasto, então a representação de Leibniz ficaria

$$\frac{ds}{dt} = s'(t)$$

isto é, estaríamos derivando o espaço em função do tempo.

Vejamos como ficaria um exemplo nesse contexto.

Exemplo: Dada a função horária $s(t) = t^2 - 5t + 1$, determine $s'(15)$.

Solução:

$$s(t) = t^2 - 5t + 1$$

$$\frac{ds}{dt} = 2t - 5$$

Sendo tem-se:

$$s'(15) = 2 \cdot 15 - 5$$
$$s'(15) = 25$$

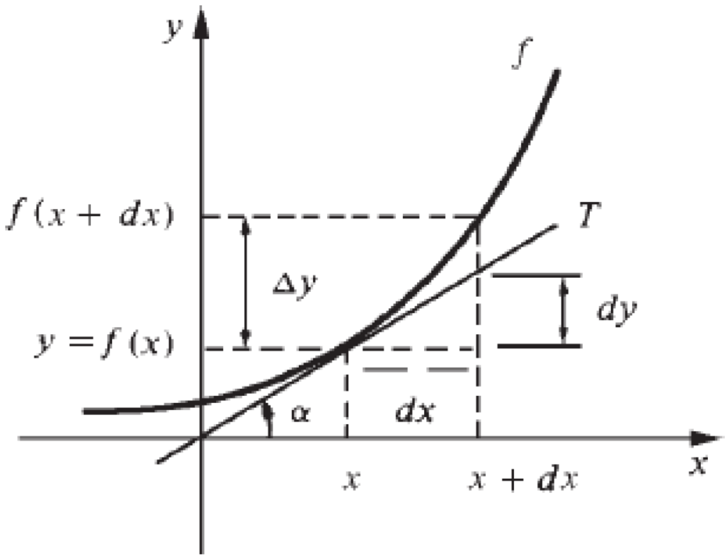
Vamos finalizar este tópico analisando a notação $\frac{dy}{dx}$ não mais como uma simples forma de indicar a derivada de y em relação a x, mas como um quociente entre o acréscimo dy e o acréscimo dx. Lembrando como já foi mencionado mais acima que

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

Considerando inicialmente a reta t tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$, quando fazemos o acréscimo dx na reta tangente obtemos o acréscimo dy, ou seja, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$. Por outro lado, se fizemos o acréscimo dx considerando o gráfico da função f, então passaremos do ponto $(x, f(x))$ para o ponto $(x + dx, f(x + dx))$, cujo acréscimo na imagem da função é representado por $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$.

O gráfico abaixo (figura 15), obtido em (GUIDORIZZI, p. 292), ilustra o que acabamos de mencionar.

Figura 15



Como $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, então

$$dy = f'(x)dx.$$

Mas a pouco vimos que

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

Além disso, observando a figura 15 acima percebe-se que dy é um valor aproximado para Δy, e essa aproximação se torna mais precisa quanto menor for o valor do acréscimo dx. Ou seja, quanto mais se diminui o valor do acréscimo dx menor fica a diferença $\Delta y - dy$, e menor é o erro que se comete ao aproximar Δy por dy.

Ditas estas coisas, podemos fixar um valor para x e definir uma função linear que a cada $dx \in R$, associa $dy \in R$, em que $dy = f'(x)dx$. Esta função recebe o nome de *diferencial de* f *em* x, ou simplesmente *diferencial de* $y = f(x)$.

Vamos utilizar o exemplo a seguir também retirado em (GUIDORIZZI, p. 293) para mostrar como se pode relacionar na prática Δy com dy.

Exemplo: Seja $y = x^2$. Relacione Δy com dy.

Solução:

$$\frac{dy}{dx} = (x^2)' = 2x$$

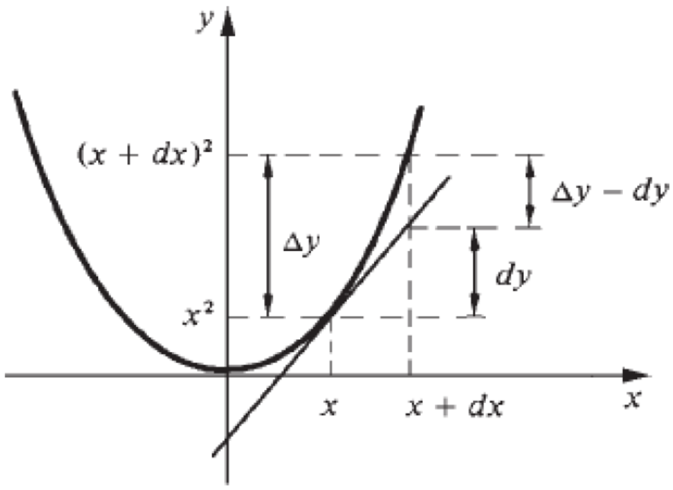
Assim, a diferencial de $y = x^2$ é dada por

$$\boxed{dy = 2x\, dx}$$

Por outro lado

$$\Delta y = (x + dx)^2 - x^2$$

Figura 16



Ou seja,

$$\Delta y = 2x\, dx + (dx)^2 = dy + (dx)^2$$

Portanto

$$\Delta y - dy = (dx)^2$$

Conclusão: quanto menor for o valor de dx menor será a diferença entre $\Delta y - dy$.

2.5 – A DERIVADA E A VARIAÇÃO DAS FUNÇÕES

Nosso objetivo neste tópico é mostrar uma das formas de aplicar a derivada, que é no estudo de pontos de máximos e mínimos, no crescimento e no decrescimento, na obtenção dos extremantes, concavidade e pontos de inflexão.

Sabendo como obter tais informações a partir dos conhecimentos de derivada podemos então tirar uma série de conclusões que nos permitem esboçar e compreender o gráfico de uma função.

Escolhemos aqui como sequência didática a sequência observada no livro Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 8, 7ª Edição, páginas de 163 a 204, por acharmos mais simples de ser entendida para o contexto da educação básica.

Começaremos então pela sequência de definições a seguir que nos permitirão enunciar três teoremas ligados intimamente com o estudo de máximos e mínimos de uma função.

Definição 1: Seja $f: D \to R$ e seja $x_0 \in D$. Chamamos *vizinhança de* x_0 um intervalo $V =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, em que δ é um número real positivo.

Definição 2: Dizemos que x_0 é um *ponto de máximo local de* f, se existir uma vizinhança V de x_0 tal que:

$$f(x) \leq f(x_0) \ , \quad \forall\, x \in V$$

Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado *máximo local* de f.

Definição 3: Dizemos que x_0 é um *ponto de mínimo local de* f, se existir uma vizinhança V de x_0 tal que:

$$f(x) \geq f(x_0) \ , \quad \forall\, x \in V$$

Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado *mínimo local* de f.

Definição 4: Quando x_0 é um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local, dizemos simplesmente que x_0 é um *ponto extremo* ou *extremante* de f. E nesse caso, o valor $f(x_0)$ é chamado de *extremo de* f.

Definição 5: Dizemos que $f(x_0)$ é um *valor máximo absoluto de* f se $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall\, x \in D_f$. Isto é, o valor $f(x_0)$ é igual ou maior que qualquer outro valor que a função f possa assumir.

Definição 6: Dizemos que $f(x_0)$ é um *valor mínimo absoluto de* f se $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall\, x \in D_f$. Isto é, o valor $f(x_0)$ é igual ou menor que qualquer outro valor que a função f possa assumir.

Feitas estas definições vajamos o primeiro dos teoremas, conhecido pelo nome do Matemática que o enunciou.

Teorema de Fermat: Seja $f: D \to R$ uma função derivável no ponto $x_0 \in D$, com x_0 sendo um extremo local de f. Então $f'(x_0) = 0$.

Demonstração

Como por hipótese x_0 é extremo local de f, então x_0 pode ser máximo local ou mínimo local de f.

Suponhamos então, sem perda de generalidade, que x_0 seja mínimo local interior de f.

Nesse caso, existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para todo $x \in V$, temos:

$$f(x_0) \leq f(x) \to \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \; para \; x < x_0 \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \; para \; x > x_0 \end{cases}$$

Como, por hipótese, f é derivável em x_0, o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

existe e é finito. E além disso, este último limite correspondente à derivada da função f no ponto $\big(x_0, f(x_0)\big)$ é igual aos limites laterais

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \leq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \geq 0$$

Estes dois últimos limites laterais no levam à conclusão de que $f'(x_0) = 0$.

Logo está concluída a demonstração do Teorema de Fermat para o caso em que x_0 seja mínimo local interior de f.

Se considerarmos x_0 como máximo local interior de f, então existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para todo $x \in V$, temos:

$$f(x_0) \geq f(x) \rightarrow \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \; para \; x < x_0 \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \; para \; x > x_0 \end{cases}$$

Como, por hipótese, f é derivável em x_0, o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

existe e é finito. E além disso, este último limite correspondente à derivada da função f no ponto $\left(x_0, f(x_0)\right)$ é igual aos limites laterais

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \leq 0$$

Estes dois últimos limites laterais nos levam à mesma conclusão de antes:

$$f'(x_0) = 0.$$

O teorema de Fermat nos garante que num extremo local interior de uma função derivável f, a reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x.

Esse resultado pode ser interpretado geometricamente da maneira como indicam as figuras 17 e 18 a seguir, obtidas em (IEZZI, p. 174) a seguir:

Figura 17

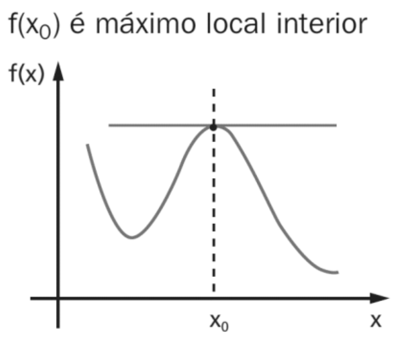
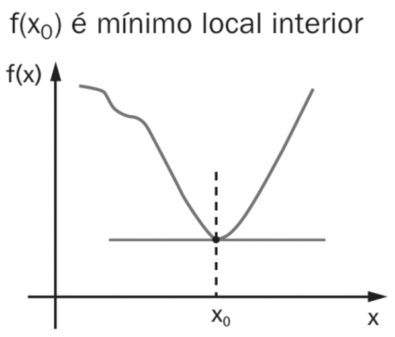


Figura 18



O Teorema de Fermat que acabamos de enunciar e demonstrar irá nos auxiliar na demonstração do teorema de Rolle, que vem a seguir.

Teorema de Rolle: Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então existe pelo menos um ponto $x_0 \in]a,b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Demonstração

Vamos fazer esta demonstração subdividida em dois casos.

1º Caso: Vamos considerar que a função f é constante em $[a,b]$.

Sendo assim, $f'(x_0) = 0$ em $]a,b[$.

Ou seja, para todo $x_0 \in]a,b[$ tem-se $f'(x_0) = 0$.

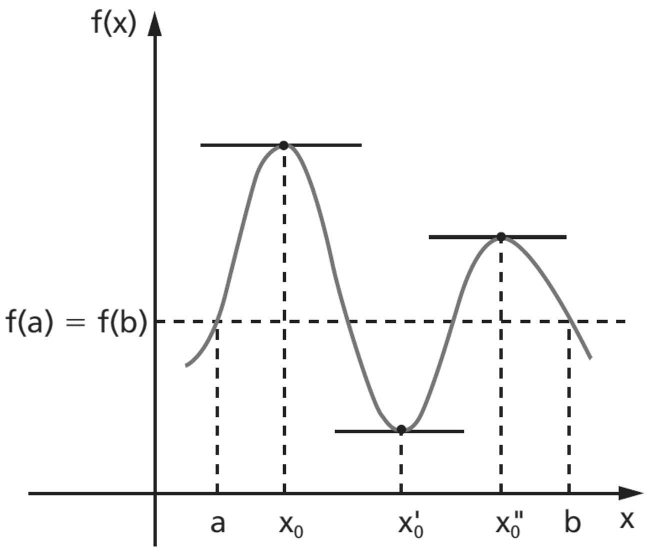
2º Caso: Vamos considerar que a função f não é constante em $[a,b]$.

Dessa forma, existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x) \neq f(a) = f(b)$.

Como uma das hipóteses afirma que f é contínua em $[a,b]$, então f tem um mínimo e um máximo em $[a,b]$.

Geometricamente esse teorema pode ser interpretado como mostra a figura seguinte, obtida em (IEZZI, p. 176):

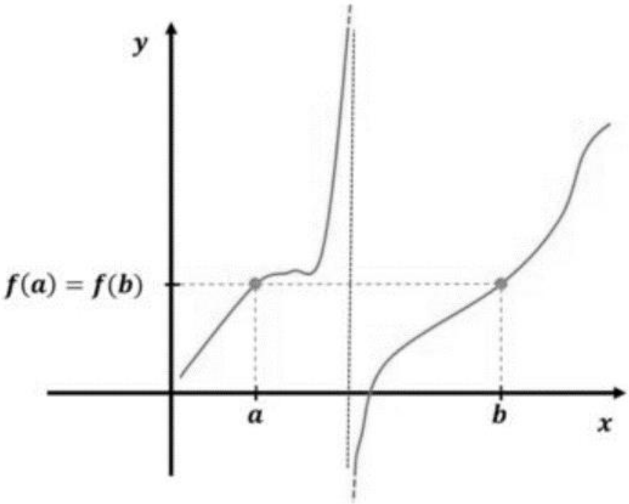
Figura 19



Observa-se na figura 19 que toda vez que um ponto percorrer o gráfico da função f dentro de algum intervalo aberto $]a,b[$ onde se tenha $f(a) = f(b)$, em pelo menos um ponto a reta tangente ao gráfico de f será paralela ao eixo x.

Não esqueçamos, porém que f deve ser contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto $]a, b[$. Caso contrário haverá casos em que o Teorema não funcionará. Como ocorre na situação ilustrada na figura 20 a seguir:

Figura 20



Fonte: Pesquisa na Internet

Na figura 20 acima a função cujo gráfico é mostrado não obedece aos critérios que acabamos de citar dentro do intervalo $[a, b]$. Consequentemente o Teorema de Rolle não se aplica, nesse caso.

CAPÍTULO III
O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

3.1 – APRESENTAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA

O GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica. A expressão "matemática dinâmica" faz referência à forma como este aplicativo se comporta quando inserimos as informações nele, pois é possível manipular as informações algébricas de modo que a visualização geométrica é atualizada em tempo real conforme se vai alterando e, ao mesmo tempo, se fazemos alguma manipulação geométrica a informação algébrica correspondente se auto modifica no mesmo instante em que estamos fazendo a alteração. Assim, o objetivo do GeoGebra é reunir em um único aplicativo, com funcionamento não estático (e daí o termo dinâmico) conceitos de geometria e álgebra. E é da junção entre estes dois campos de estudo da matemática que surgiu o nome GeoGebra.

O GeoGebra é um software gratuito e por isso, pode ser utilizado livremente como ferramenta de ensino e aprendizagem, abrindo precedentes para que as pessoas possam compartilhar os conhecimentos obtidos através do software em comunidades, nas mais diversas redes sociais. Todo conteúdo criado com a GeoGebra, como animações por exemplo, pode ser divulgado abertamente na internet, e usado como material de apoio por alunos e professores no ensino e aprendizagem de Matemática ou qualquer outra disciplina na qual seja possível se utilizar das ferramentas do software.

Vale a pena ressaltar que o aplicativo GeoGebra possui ferramentas relacionadas à álgebra, geometria, probabilidade, estatística, plotagem de gráficos, planilha de cálculos integrada a ele, e até mesmo a possibilidade de cálculo com símbolos específicos, como o de integral, dentre outros. Mas mesmo com toda essa gama de ferramentas, a interface e a forma de utilização do software é muito simples e intuitiva, podendo ser usado nos mais diversos níveis e séries da educação básica. No software é possível trabalhar com situações desde o nível muito básico até problemas envolvendo limites, derivadas e integrais, por exemplo.

Como o GeoGebra possui uma série de ferramentas que possibilitam, entre outas coisas, visualizar, interpretar, manipular e entender uma série de conceitos da Matemática, o aplicativo permite uma maior interação entre professores, alunos e os conteúdos matemáticos estudados, se postulando, dessa forma, como uma excelente opção de ferramenta de apoio no ensino e aprendizagem de matemática em sala de aula.

Na realidade, o GeoGebra foi um software idealizado para ser utilizado exatamente por professores e alunos quando do ensino e aprendizagem da Matemática em sala de aula (ou fora dela se for o caso). Ele foi desenvolvido para ser utilizado de maneira livre, para funcionar em praticamente todas as plataformas, como Windows, Linux, MacOs e Android, dentre outras, e para rodar de forma leve em quase qualquer conjunto de hardware e software, já que exige configurações bem básicas para seu funcionamento.

Quando foi criado, em 2001, como parte de uma Dissertação de Mestrado, o GeoGebra já era considerado uma excelente escolha para estudos em Matemática, sobretudo em Geometria. E de lá até os dias atuais foram feitos aperfeiçoamentos que tornaram este software ainda melhor e mais útil, inclusive com a inserção de algumas novas ferramentas que não eram parte integrante da sua primeira versão.

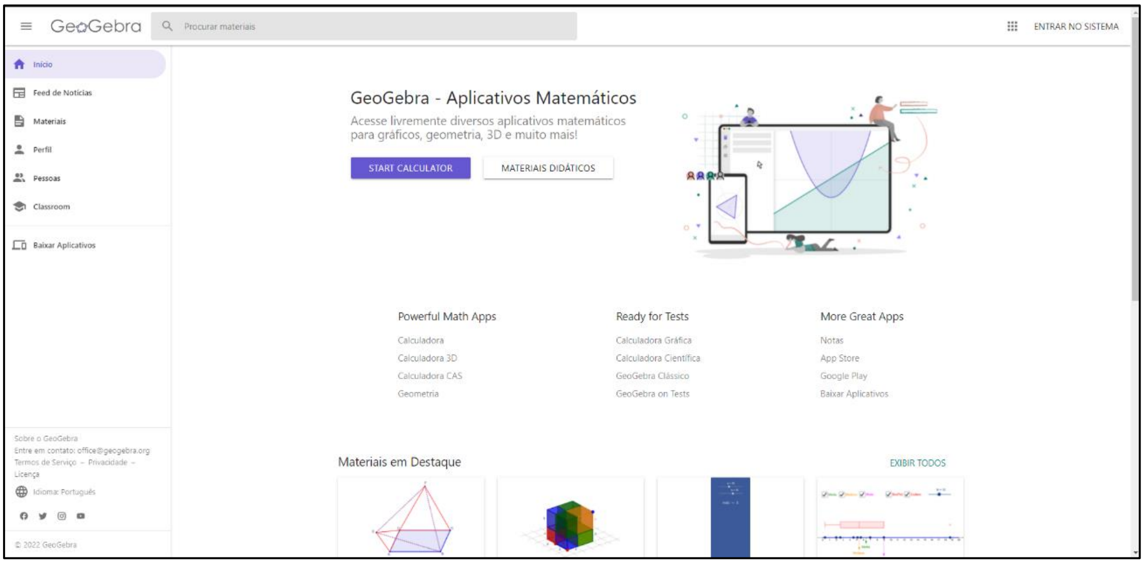
Não nos aprofundaremos com muita ênfase no estudo do GeoGebra, já que o objetivo deste trabalho não é tratar desse software especificamente, mas sim utilizá-lo como meio auxiliar para o estudo de aplicações de cálculo na educação básica, entretanto vamos ressaltar apenas de passagem um dentre seus vários aperfeiçoamentos, que é o fato de poder ser utilizado através de qualquer programa navegador web, como o Google Chrome ou o Microsoft Edge por exemplo.

Apenas as características e qualidades que citamos acima já são suficientes para justificar a escolha do GeoGebra como meio auxiliar para se estudar qualquer assunto de matemática dentre os normalmente vistos na educação básica. Reconhecemos aqui que há outros aplicativos, inclusive de matemática dinâmica, possíveis para se fazer tais estudos, nas optamos por esse aplicativo em particular. E um dos fatores que torna o uso de um aplicativo qualquer, em particular do GeoGebra, é a possibilidade de tornar o ensino e aprendizagem da Matemática mais acessível e mais palpável que o de costume, sobretudo no que diz respeito à nossa proposta que é mostrar para os alunos que conhecendo apenas alguns conceitos básicos do cálculo é possível resolver, às vezes com mais rapidez e simplicidade, problemas estudados na educação básica, em especial no Ensino Médio.

3.2 – A INTERFACE DO GEOGEBRA

Antes de falar propriamente da interface do GeoGebra é importante destacar que o GeoGebra pode ser obtido oficialmente no site geogebra.org, que é o site destinado a tratar exclusivamente desse aplicativo. Ao acessar o site nos deparamos com a seguinte tela inicial:

Figura 21



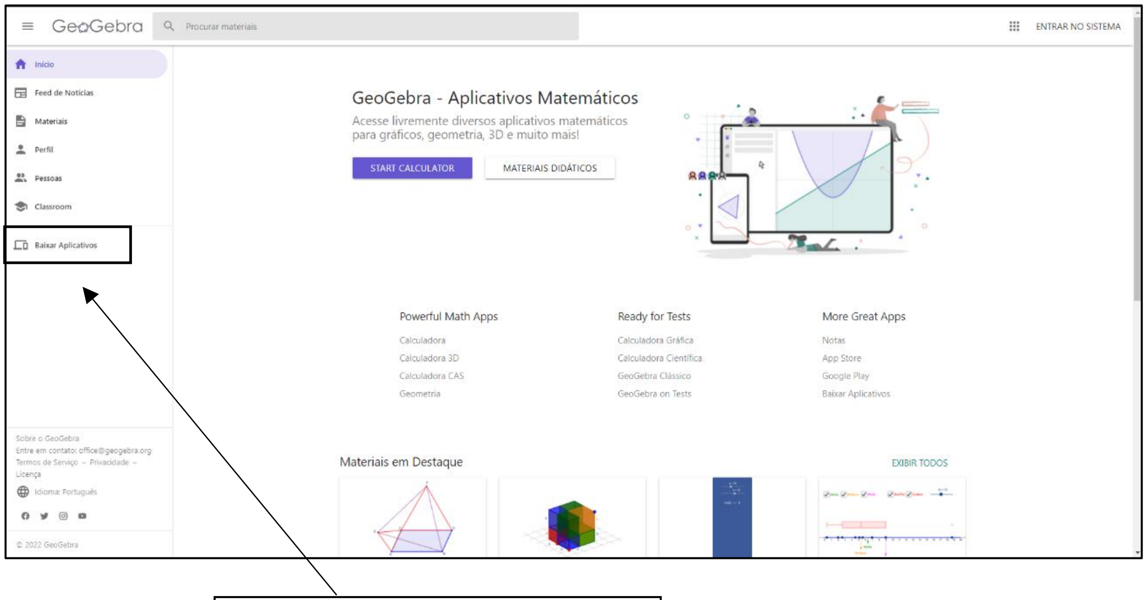
Obviamente há vários links que podemos acessar já a partir desta tela inicial, entretanto, vamos mencionar apenas algumas opções principais que serão as mais básicas para poder começar a fazer uso do aplicativo.

O GeoGebra possui mais de uma interface de interação com o usuário, cada uma delas customizada de modo a expor as logo na tela inicial as ferramentas mais adequadas para determinada utilização. Além disso o usuário pode escolher entre usar o aplicativo via navegador web ou baixar o arquivo correspondente à interface que deseja usar e instalar no seu computador, smartphone, tablet ou notebook, por exemplo.

Neste trabalho optamos por usar a versão clássica do GeoGebra, fazendo o download e usando a partir de um computador PC. Mas deixamos antecipado aqui que tanto a partir do navegador como a partir de um smartphone é possível fazer os mesmos usos que faremos neste trabalho.

Para fazer o download do GeoGebra a partir da tela inicial mostrada na figura 21 acima, acessada em geogebra.org, clicamos o botão baixar aplicativos à esquerda da tela como mostrado na figura 22 a seguir.

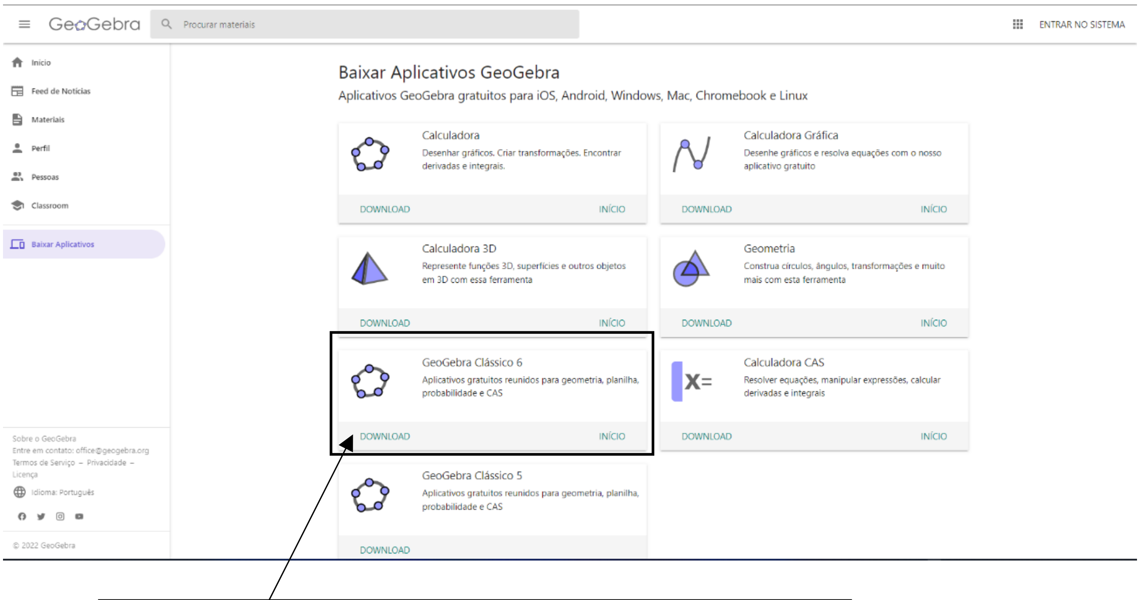
Figura 22



Botão “Baixar Aplicativos”

Aparecerá na sequência a tela mostrada abaixo na figura 23, na qual deve-se acessar a opção download da caixa localizada na parte central inferior da tela, que está destacada e indicada pela seta.

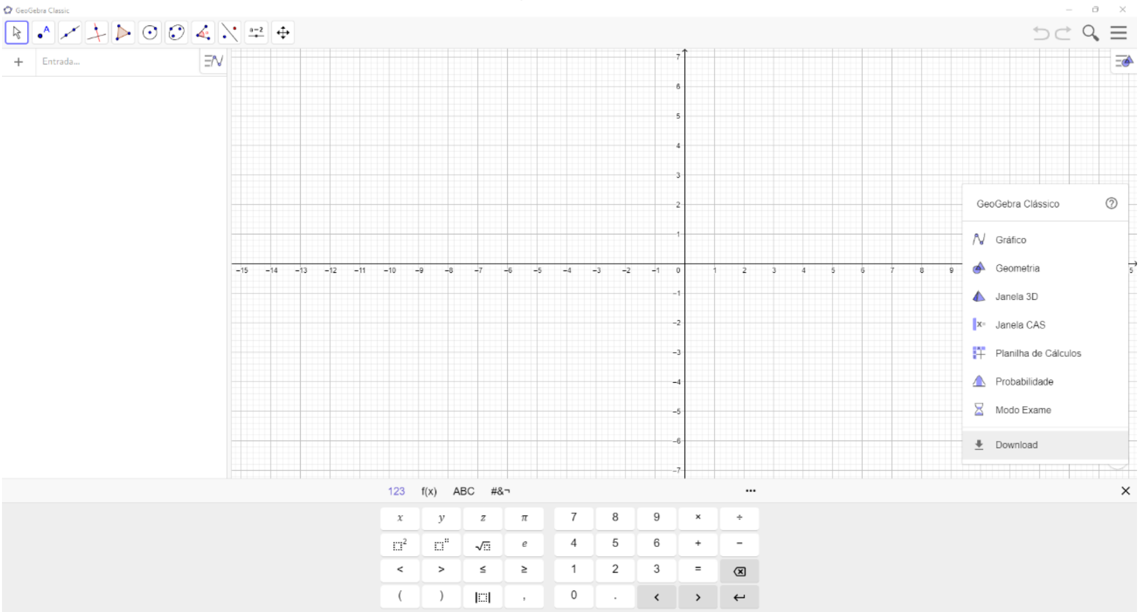
Figura 23



Botão para download do GeoGebra Clássico 6

Ao clicar o botão indicado na figura 23 anterior o usuário poderá fazer o download do arquivo necessário para instalar o GeoGebra em seu computador. Depois de fazer o download e instalação, ao abrir pela primeira vez o aplicativo exibirá uma tela inicial, ou seja, sua interface, como está mostrado na figura 24 abaixo:

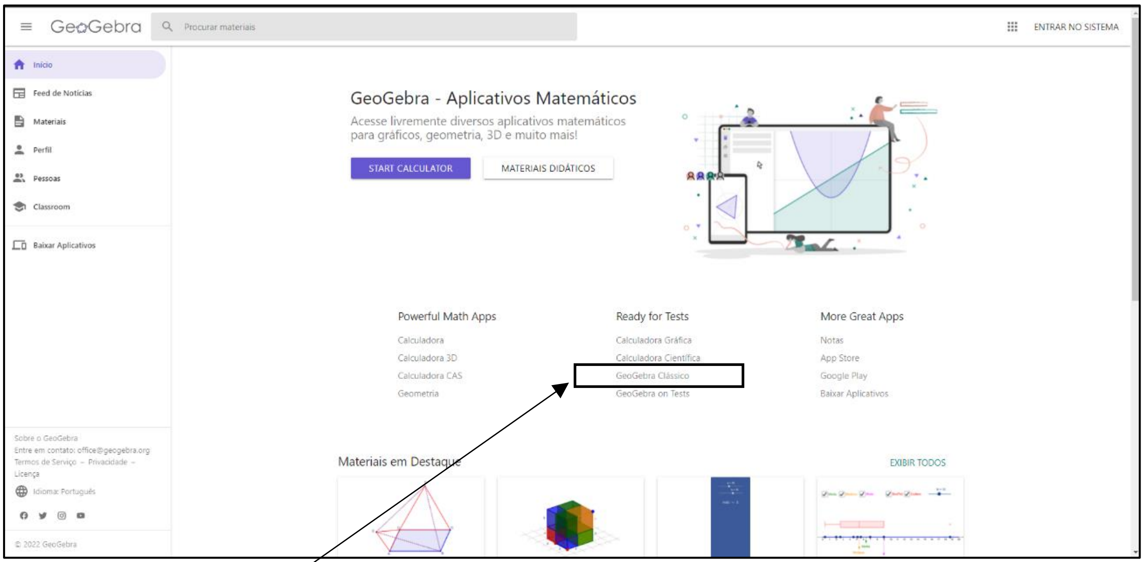
Figura 24



Ressalvadas pequenas diferenças entre a interface que o GeoGebra apresenta em um smartphone (ou em um tablet) e em um computador (ou em notebook), tudo o que faremos é perfeitamente possível de ser feito tanto em computadores quanto em smartphones.

Ainda que não seja o intuito mais imediato deste trabalho vale a pena deixar registrado aqui que caso tivéssemos a pretensão de usar o GeoGebra a partir do navegador web na tela mostrada na figura 21 bastaria clicarmos o botão “GeoGebra Clássico” na região central da tela (como indicado na figura a 25 a seguir) e a interface seria mostrada em uma nova guia do navegador. Ao compararmos as duas interfaces (do navegador e da versão para PC) a diferença é quase imperceptível e do ponto de vista prático podemos até desconsiderá-la. Há também uma pequena diferença quando executamos no smartphone e, novamente, do ponto de vista prático nem daremos ênfase a isto.

Figura 25



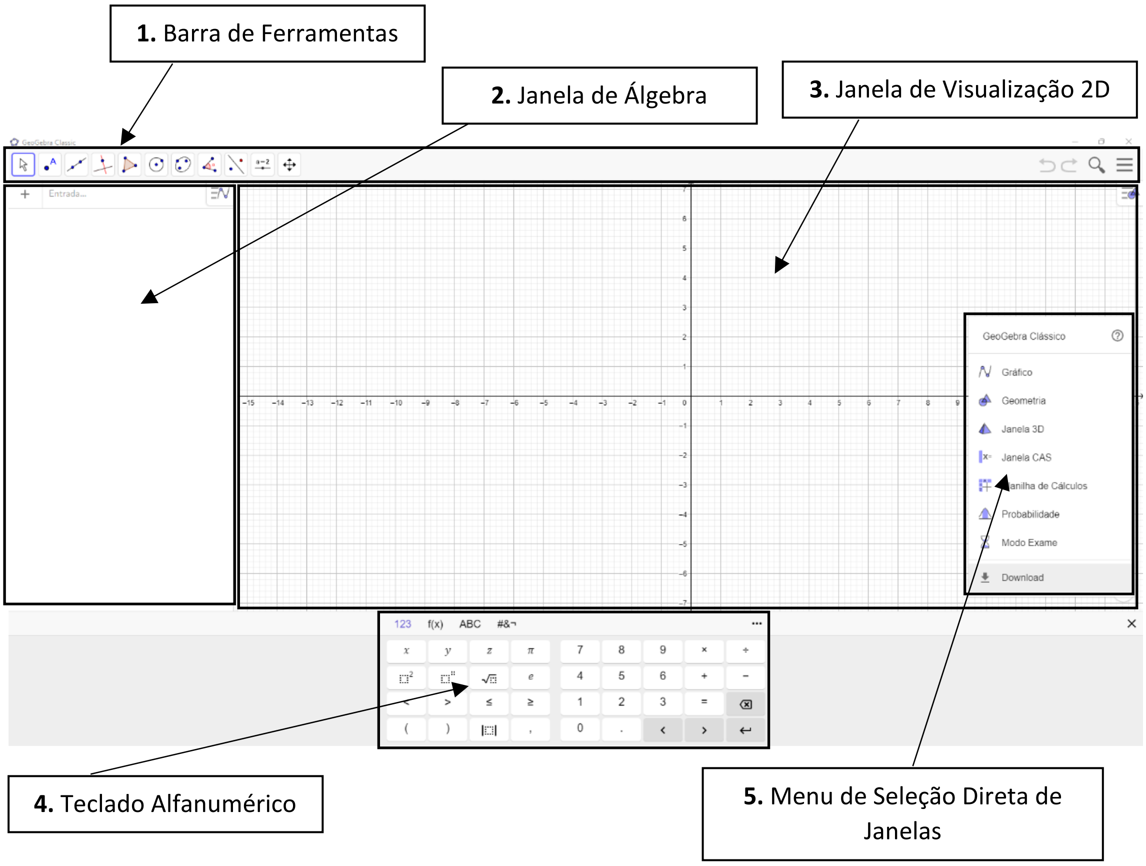
Botão para executar o GeoGebra Clássico 6 diretamente do navegador web

Apesar de não fazer parte do objetivo deste trabalho, faz sentido citar aqui que é possível criar uma conta de usuário com login e senha e a partir daí ter outras possibilidades de uso propiciadas pelo aplicativo, como salvar arquivos em nuvem, ou então compartilhar com outros usuários, participar de redes de construção de conteúdo, e assim por diante. Também é possível obter materiais criados por outros usuários e que podem ser executados pelo GeoGebra, de forma livre e sem a preocupação com direitos autorais. Por último há a possibilidade de criar salas de aula virtuais dentro do aplicativo, o que permite um ambiente de discussão e construção de conhecimento matemático em tempo real.

3.3 – FERRAMENTAS BÁSICAS DO GEOGEBRA

Conhecida a interface do GeoGebra, da figura 24 anterior, vamos destacar as principais regiões observáveis logo que o iniciamos, sem utilizar termos técnicos de maneira exagerada e tentando explicar cada parte do software de uma forma resumida. Usaremos para tal a figura mostrada a seguir:

Figura 26



Explicando cada região destacada na figura 26 acima temos:

1. **Barra de Ferramentas**: É a barra onde encontramos todas a ferramentas do GeoGebra. Na parte esquerda desta barra vemos uma série de botões que funcionam como menus. Ao clicar qualquer um deles, um leque de opções que se assemelham com aquela mostrada na própria figura do botão aparece, possibilitando assim seu acesso. Ainda na mesma barra, mas do lado direito, vemos os botões (da esquerda para direita): desfazer, refazer, pesquisar e o botão com três traços, que ao ser clicado abre um menu suspenso dando uma série de outras opções. Este último botão dá acesso à outras opções mais gerais do aplicativo como: novo, abrir, gravar, compartilhar e, inclusive a opção de entrar, que permite acessar o site exclusivo do GeoGebra (o qual já mencionamos anteriormente).

2. **Janela de Álgebra**: É a janela onde inserimos de forma algébrica as informações sobre o objeto que queremos visualizar. Pode ser a expressão de uma função, por exemplo.

3. **Janela de Visualização 2D**: É a janela onde podemos criar diretamente um objeto geométrico, e cuja representação algébrica pode ser vista na janela de álgebra que acabamos de citar.

   A janela de visualização pode também ser chamada de Janela de Geometria, uma vez que esta dá a representação geométrica do objeto em questão, permitindo inclusive a visualização sem os eixos cartesianos e a malha de fundo, dando a impressão de uma folha de papel em branco.

   As janelas de geometria e de álgebra trabalham de forma vinculada, de modo que aquilo que se altera em uma das janelas tem efeito direto sobre o que está representado de forma associada na outra janela. Por exemplo, se entramos com a expressão de uma função na janela de álgebra imediatamente é mostrado o gráfico correspondente na janela de geometria. A partir daí cada alteração no gráfico provoca uma mudança na expressão algébrica da função e, da mesma forma, modificando as informações algébricas observa-se a mudança geométrica correspondente.

4. **Teclado Alfanumérico**: Fica Localizado na parte inferior do programa. É nele que digitamos os comandos que são executados pelo GeoGebra. É claro que podemos digitar quase todos os comandos diretamente na janela de álgebra. Contudo, no teclado alfanumérico temos uma visualização melhor de números, símbolos, expressões matemáticas pré-definidas, e até de um teclado semelhante ao que é usado no computador. Este conjunto de opções facilita bastante a entrada dos dados, e inclusive isto é um dos motivos pelos quais é muito utilizado em smartphones e tablets, sobretudo.

5. **Menu de Seleção Direta de Janelas**: É um menu suspenso que aparece de forma automática logo que iniciamos o aplicativo. O objetivo deste menu é oferecer acesso rápido à algumas opções que de um modo geral são bastante utilizadas. Nesse menu é oferecida uma ajuda do próprio aplicativo em formato de manual do usuário, as várias interfaces (Gráfico, Geometria, Janela 3D, Janela CAS) customizadas de acordo com suas especificidades de uso, a planilha de cálculo, cálculo de probabilidades, o modo exame, e por último a opção download que permite através de uma janela suspensa que é exibida logo que clicamos esta opção, baixar qualquer um dos aplicativos do GeoGebra para a máquina.

Agora que destacamos as regiões específicas da tela inicial do GeoGebra podemos passar a observar algumas de suas principais ferramentas. Não entraremos em muitos detalhes sobre as funcionalidades de cada uma delas, já que o aplicativo possui uma quantidade razoavelmente grande de ferramentas e em nosso estudo sobre aplicações de limites e derivadas não utilizaremos a grande maioria delas.

Na sequência que se segue queremos apenas falar de maneira resumida sobre as funções das várias ferramentas do GeoGebra, não fazendo construções com a finalidade de mostrar como se poderia utilizar na prática tais ferramentas. De forma análoga trataremos de maneira concisa sobre as várias interfaces (janelas diferentes) sob as quais o GeoGebra pode se mostrar ao usuário.

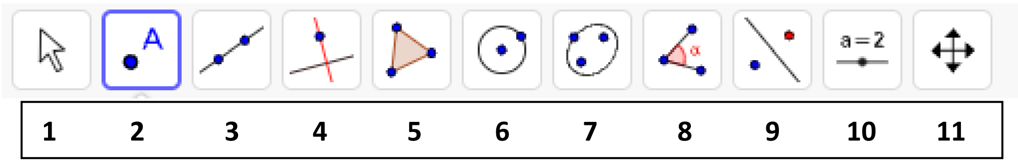
Logicamente a janela que mais nos interessa aqui é a janela padrão do GeoGebra Clássico, bem como algumas ferramentas que são essenciais ao nosso trabalho, como por exemplo, as ferramentas ponto, reta, controle deslizante. Essas são algumas das ferramentas principais para a nossa pretensão, que é mostrar variações nos gráficos e animações, com o intuito de facilitar a compreensão por parte do aluno.

Feitas estas ponderações vamos analisar com um pouco mais cuidado e de especificidade cada um dos itens que já mencionamos de uma maneira mais geral anteriormente, não esquecendo que estaremos analisando sobretudo a interface clássica de apresentação do GeoGebra.

Barra de Ferramentas

Como dissemos antes é a barra que contêm todas as ferramentas do GeoGebra. Ela comporta 11 ícones, que por sua vez dão acesso a 70 opções. Ao clicar em cada um desses ícones é aberto um menu com outras opções semelhantes à que ele se refere. A seguir faremos uma descrição geral da barra de ferramentas do GeoGebra.

Figura 27



Fazendo uso da numeração indicativa que acrescentamos logo abaixo da barra de ferramentas expliquemos de início a que ferramenta se refere cada um desses ícones:

1 – Ferramenta Mover: Permite selecionar, arrastar ou manipular objetos;

2 – Ferramenta Ponto: Permite inserir um ponto, inclusive em uma curva, função ou qualquer objeto geométrico;

3 – Ferramenta Reta: Cria uma reta que passa por dois pontos ou por duas posições quaisquer.

4 – Ferramenta Reta Perpendicular: Cria uma reta perpendicular à outra reta (ou semirreta, ou segmento ou vetor) e que passa por um ponto escolhido;

5 – Ferramenta Polígono: Desenha um polígono com uma quantidade n qualquer de lados;

6 – Ferramenta Círculo: Cria um círculo cujo centro é o ponto selecionado, e que passo por um outro ponto selecionado dois do primeiro;

7 – Ferramenta Elipse: Constrói uma elipse quando o usuário seleciona dois pontos que servem como focos e um terceiro ponto que pertencerá à curva descrita pela própria elipse;

8 – Ferramenta Ângulo: Constrói um ângulo (externo ou interno) a partir de três pontos, ou então a partir de duas retas, semirretas, segmentos ou vetores;

9 – Ferramenta Reflexão em relação a uma reta: Selecionando-se um objeto qualquer (como ponto, reta, círculo ou polígono, por exemplo) e a reta de reflexão, é construído então um reflexo do objeto em relação à reta escolhida;

10 – Ferramenta Controle Deslizante: É utilizado para modificar um parâmetro; dá a possibilidade de o usuário visualizar as variações em objetos como, uma função por exemplo, variando os valores dos parâmetros do objeto. Pode ser utilizado de forma manual ou automática;

11 – Ferramenta Mover Janela de Visualização: Permite movimentar a janela de visualização em qualquer direção; permite também movimentar qualquer um dos eixos cartesianos.

Agora que fizemos passeio pelas ferramentas que servem como ícone principal de cada grupo, vamos mostrar de maneira mais específica as demais opções que aparecem quando clicamos em cada um dos ícones cujas funcionalidades acabamos de descrer nos números de **1** a **11** acima. Es todos os casos a partir de agora usaremos como referência a figura 3.2.7 com sua respectiva numeração.

Para começar, ao clicar no ícone da ferramenta **1** (Ferramenta Mover) vejamos o menu que se mostra ao usuário:

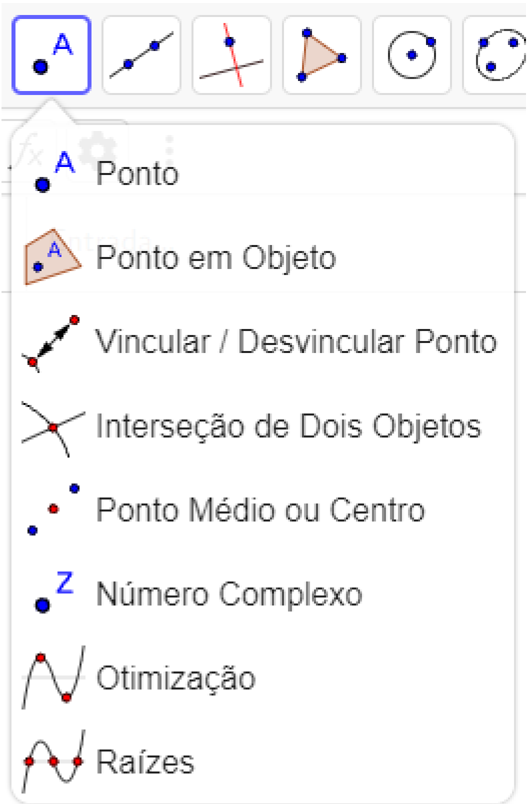
Figura 28

- A ferramenta **Função à Mão Livre** permite que o usuário desenhe na tela com liberdade. O aplicativo "tenta" então reconhecer o desenho feito como sendo um objeto matemático conhecido: o gráfico de alguma função, um círculo, uma elipse, um retângulo, e assim por diante. Se o aplicativo reconhece o desenho, então o transforma no objeto correspondente; caso não consiga, deixa o objeto do jeito como o usuário desenhou.

- A ferramenta **Caneta** simplesmente "deixa" que o usuário desenhe qualquer coisa na tela com total liberdade e sem a intervenção do aplicativo.

Passando agora à ferramenta **2** (Ferramenta Ponto) o menu exibido ao se clicar no ícone dela será:

Figura 29



- A ferramenta **Ponto em Objeto** permite fixar um ponto a um determinado objeto ou à sua fronteira.
- A ferramenta **Vincular / Desvincular Ponto** já é autoexplicativa, pois pode vincular ou desvincular pontos de objetos geométricos e de funções também.
- A ferramenta **Interseção de Dois Objetos** insere um ponto exatamente na interseção de dois objetos.
- A ferramenta **Ponto Médio ou Centro** cria o ponto médio entre dois pontos já existentes e escolhidos, ou então permite criar os dois pontos e automaticamente insere o ponto médio entre eles.

- A ferramenta **Número Complexo** gera um número complexo na janela de álgebra (na forma algébrica dele) correspondente ao local (ponto) do plano onde o usuário clica na janela de visualização.
- A ferramenta **Otimização** acrescenta um ponto a cada um dos extremos no gráfico de uma função; esses extremos podem ser tanto locais quanto globais, e tanto de máximos quanto de mínimos.
- A ferramenta **Raízes** insere um ponto exatamente em cada local onde o gráfico de uma função intercepta o eixo das abscissas.

Chegamos agora ao grupo da ferramenta **3** (Ferramenta Reta), cujo menu está exibido na figura a seguir:

Figura 30

- A ferramenta **Segmento** cria um segmento a partir de dois pontos ou a partir de duas posições quaisquer escolhidas.
- A ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo** cria segmentos horizontais a partir de um ponto (ou posição) e um comprimento que é definido logo a seguir. O segmento é criado, por padrão, da esquerda do ponto escolhido para a direita na janela de visualização.

- A ferramenta **Semirreta** cria uma semirreta a partir de um ponto inicial e um outro ponto qualquer do plano.
- A ferramenta **Caminho Poligonal** cria uma linha poligonal de segmentos consecutivos a partir de uma sequência de posições escolhidas pelo usuário, sendo que o último ponto escolhido deve ser exatamente o ponto onde se inicial a poligonal.
- A ferramenta **Vetor** cria um vetor a partir de um ponto e de uma direção quaisquer escolhidos.
- A ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto** cria um vetor equipolente a outro a partir de um ponto previamente escolhido.

O próximo menu que vamos avaliar é o da ferramenta **4** (Ferramenta Reta Perpendicular) cuja ilustração é:

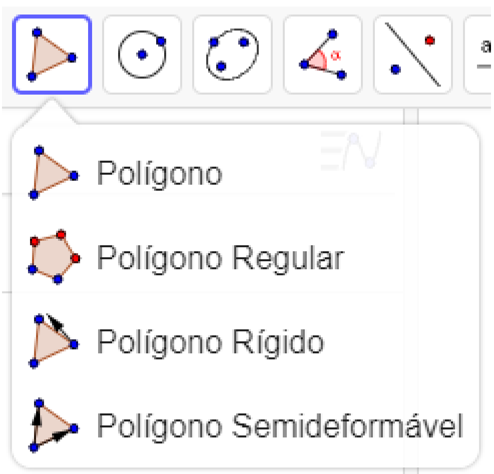
Figura 31

- A ferramenta **Reta Paralela** cria a partir de um ponto e de uma reta (ou semirreta, ou segmento, ou vetor) uma paralela a ela passando pelo ponto já escolhido.

- A ferramenta **Mediatriz** cria a mediatriz ao escolhermos dois pontos quaisquer, ou então um segmento
- A ferramenta **Bissetriz** cria as bissetrizes dos ângulos formado entre duas retas (ou duas semirretas, ou dois segmentos)
- A ferramenta **Reta Tangente** cria uma reta tangente a uma curva (ou gráfico de função), bastando para isso selecionar um ponto e, a seguir a curva (ou o gráfico).
- A ferramenta **Reta Polar ou Diametral** permite selecionar um ponto (ou uma reta) e a seguir uma cônica (ou um círculo), e cria uma reta que passa por um ponto não representado na janela de visualização, mas que é reconhecido. O ponto por onde passa a reta criada possui uma propriedade matemática interessante (mas que não citaremos aqui por conveniência).
- A ferramenta **Reta de Regressão ou Linear** cria a reta que mais se adequa a uma sequência de pontos que podem ser selecionados após se acionar a ferramenta.
- A ferramenta **Lugar Geométrico** cria um lugar geométrico a partir de dois pontos, havendo relação entre eles, ou a partir de um ponto e um controle deslizante.

Ao acionarmos o menu da ferramenta **5** (Ferramenta Polígono) veremos o seguinte:

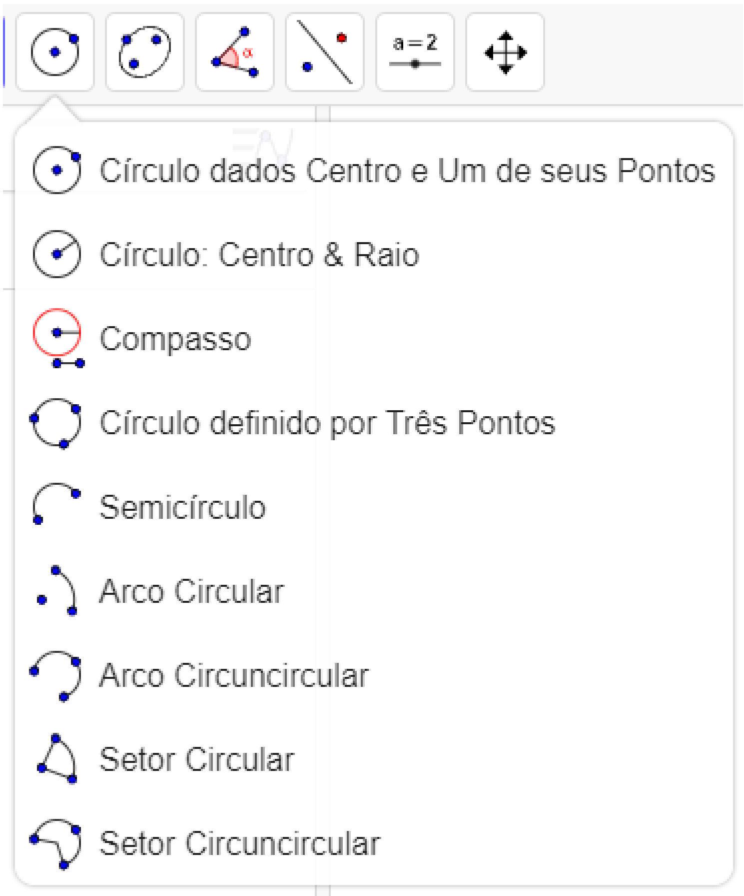
Figura 32



- A ferramenta **Polígono Regular** permite selecionar dois pontos (ou duas posições quaisquer do plano) e em seguida pede para escolher o número de lados que o polígono terá, e então cria um polígono regular. Depois de criar, podemos redimensionar os lados do polígono, contudo ele continuará sendo regular (todos os lados terão a mesma medida).
- A ferramenta **Polígono Rígido** cria um polígono qualquer cujos lados não podem ser redimensionados.
- A ferramenta **Polígono Semideformável** cria um polígono qualquer cujos lados podem ser redimensionados de maneira livre e independente um do outro.

No grupo seguinte, que é o da ferramenta **6** (Ferramenta Círculo dados Centro e Um de seus Pontos) tem-se:

Figura 33



- A Ferramenta **Círculo: Centro & Raio** permite escolher um ponto onde será o centro do círculo e na janela que se abre a seguir, escolher o tamanho do raio do mesmo.
- A Ferramenta **Compasso** permite criar um círculo selecionando dois pontos, onde o primeiro ponto selecionado ficará na borda do círculo e o segundo será seu centro.
- A Ferramenta **Círculo Definido por Três Pontos** permite a criação de um círculo escolhendo-se três pontos quaisquer não colineares; caso os pontos sejam colineares é criada uma reta passando por esses três pontos.
- A Ferramenta **Semicírculo** cria um semicírculo no sentido horário, a partir de dois pontos (ou duas posições quaisquer) escolhidos no plano.
- A Ferramenta **Arco Circular** cria um arco circular no sentido anti-horário a partir de um ponto que será seu centro e de outros dois que serão seus extremos.
- A Ferramenta **Arco Circuncircular** constrói um arco escolhendo-se três pontos não colineares de forma aleatória.
- A Ferramenta **Setor Circular** constrói um setor circular a partir da escolha de um ponto que será o centro do setor e outros dois por onde passa o arco correspondente.
- A Ferramenta **Setor Circuncircular** constrói um setor circular a partir da escolha de três pontos.

O próximo grupo é o da ferramenta **7** (Ferramenta Elipse).

Figura 34

- A Ferramenta **Hipérbole** constrói uma hipérbole a parir da escolha de dois pontos para serem os focos e um terceiro que pertence à própria curva.
- A Ferramenta **Parábola** constrói uma parábola a partir de um ponto que se escolhe e de uma reta diretriz (que deve estar previamente construída).
- A Ferramenta **Cônica por Cinco Pontos** usa cinco pontos escolhidos aleatoriamente para construir uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, dependendo da posição relativa entre os pontos escolhidos.

No grupo que corresponde à ferramenta **8** (Ferramenta Ângulo) encontraremos:

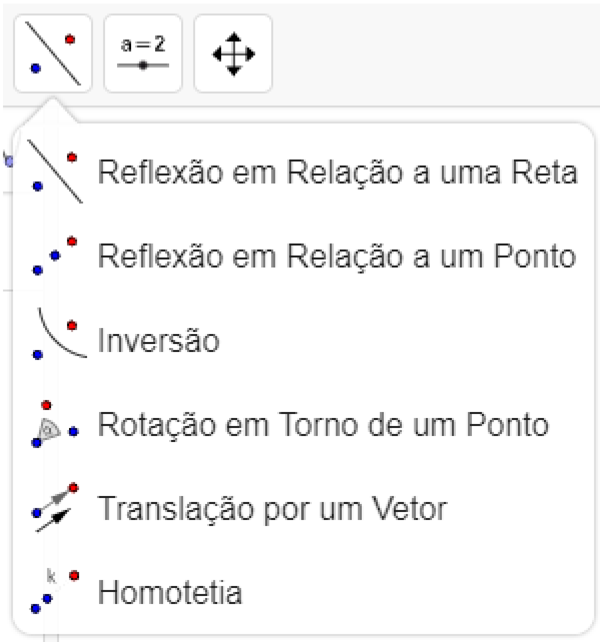
Figura 35

- A Ferramenta **Ângulo com Amplitude Fixa** constrói um ângulo escolhendo-se dois pontos e definindo-se, numa janela que aparece na sequência, a medida fixa em graus do ângulo.
- A Ferramenta **Distância, Comprimento ou Perímetro** faz a medição de quaisquer objetos do GeoGebra; pode ser usado em pontos, segmentos, retângulos, círculos, etc.

- A Ferramenta **Área** calcula e mostra a área de uma região delimitada (como um polígono, ou um círculo, por exemplo).
- A Ferramenta **Inclinação** mostra a inclinação de uma reta (ou semirreta, ou segmento).
- A Ferramenta **Lista** cria uma lista de objetos ou pontos; para usar adequadamente essa ferramenta, primeiro temos que selecionar os objetos para depois acessar a ferramenta.
- A Ferramenta **Relação** mostra alguma possível relação matemática (uma interseção, ou se são colineares, por exemplo) entre dois ou mais objetos, que devem ser selecionados antes de acessar a ferramenta.
- A Ferramenta **Inspetor de Funções** mostra, para determinado intervalo, diversas informações sobre uma função, como máximo, mínimo, raiz, integral, área, média e comprimento.

Na sequência veremos o menu da ferramenta **9** (Ferramenta Reflexão em Relação a uma Reta):

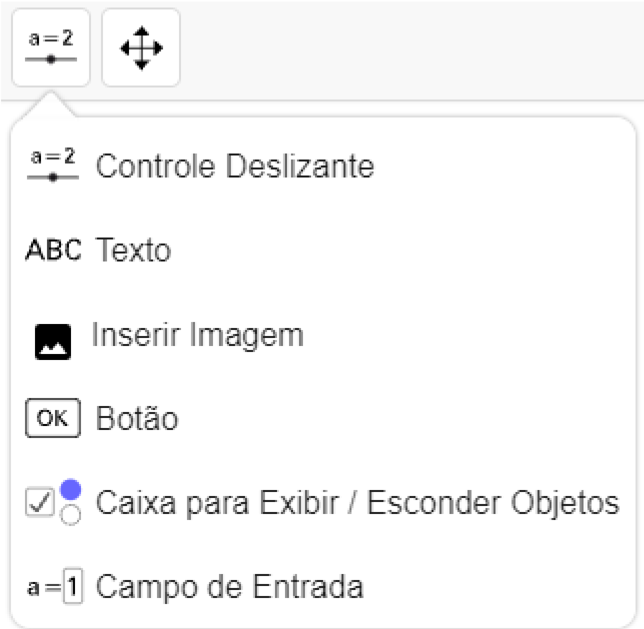
Figura 36



- A Ferramenta **Reflexão em Relação a um Ponto** espelha um objeto em relação a um ponto. Para utilizar esta ferramenta seleciona-se o objeto que se deseja espelhar e o ponto desejado.
- A Ferramenta **Inversão** dá a possibilidade de fazer a inversão de um objeto em relação a um círculo. Para fazer uso desta ferramenta deve-se selecionar primeiramente o objeto a ser invertido e a seguir, seleciona-se o círculo a partir do qual será feita a inversão do objeto.
- A Ferramenta **Rotação em Torno de um Ponto** permite que um novo objeto seja criado a partir da rotação de um primeiro, rotacionando o primeiro objeto em torno de um ponto. Para utilizar esta ferramenta é preciso selecionar primeiro o objeto que será rotacionado, a seguir, seleciona-se o ponto central da rotação e, por fim, deve-se indicar o ângulo desejado e o sentido da rotação, que pode ser tanto o sentido horário como o anti-horário.
- A Ferramenta **Translação por um Vetor** cria um novo objeto a partir da movimentação de um objeto inicial do mesmo tipo ao longo do "caminho" descrito por um vetor. Para utilizar esta ferramenta selecionamos primeiramente o objeto que será movimentado e, a seguir, selecionamos o vetor que descreverá o "caminho" (ou trajetória) por onde ocorrerá a translação.
- A Ferramenta **Homotetia** multiplica por um fator constante a distância de um ponto qualquer do espaço a um ponto fixo, deslocando-o sobre a reta definida por estes dois pontos. Para utilizar a ferramenta homotetia selecionamos de início o objeto que será movimentado, em seguida selecionamos o ponto de homotetia e, por último, escolhemos o fator multiplicativo. A medida que um dos pontos é aproximado ou afastado do ponto fixo, o outro ponto se descola sobre a reta suporte deles de acordo com o fator multiplicativo que foi escolhido.

Para a ferramenta **10** (Ferramenta Controle Deslizante) tem-se o seguinte menu:

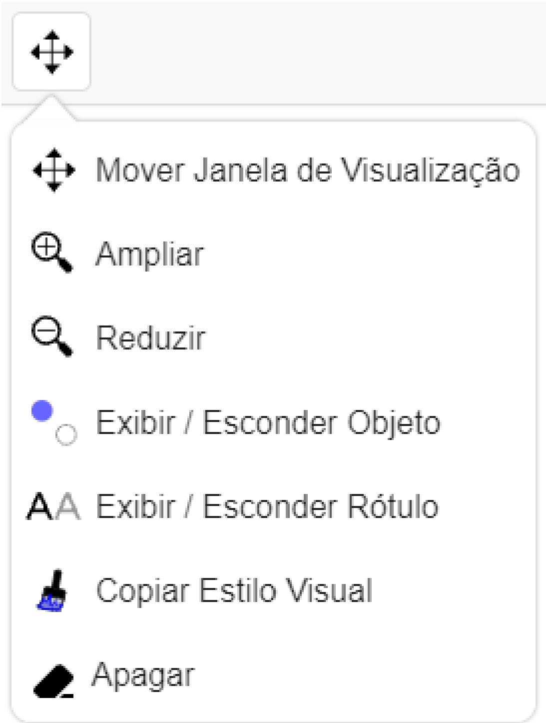
Figura 37



- A Ferramenta **Texto** pede para selecionar uma posição na janela de visualização e em seguida mostra outra janela auxiliar onde o usuário digita o texto que pretende inserir.
- A Ferramenta **Inserir Imagem** permite inserir uma imagem do próprio computador do usuário ou da webcam.
- A Ferramenta **Botão** pede para selecionar uma posição na janela de visualização e em seguida mostra outra janela auxiliar onde o usuário digita uma legenda (rótulo a ser exibido no botão) e um código que será inserido da janela de álgebra sempre que esse botão for pressionado.
- A Ferramenta **Caixa para Exibir / Esconder Objetos** permite criar uma caixa na qual podemos optar por exibir ou esconder um objeto que já foi previamente inserido na janela de visualização, inclusive com opção de legenda.
- A Ferramenta **Campo de Entrada** possibilita criar uma legenda para um objeto qualquer que já esteja inserido na janela de visualização.

Por último chega-se à ferramenta **11** (Ferramenta Mover Janela de Visualização):

Figura 38



- A Ferramenta **Ampliar** é usada para aumentar o zoom da janela de visualização quando a acionamos e clicamos em uma região da janela de visualização.
- A Ferramenta **Reduzir** é usada para diminuir o zoom da janela de visualização e funciona nos mesmos moldes da ferramenta ampliar.
- A Ferramenta **Exibir / Esconder Objeto** é usada para exibir ou esconder objetos na janela de visualização; geralmente é usada quando, depois de fazermos alguma construção queremos esconder parte dos objetos usados.
- A Ferramenta **Exibir / Esconder Rótulo** permite exibir ou esconder o rótulo dos objetos que estão na janela de visualização e funciona de maneira semelhante à ferramenta anterior.
- A Ferramenta **Copiar Estilo Visual** permite copiar o estilo de um objeto e aplica-lo a outro (ou a vários outros) tornando as formatações de objetos mais ágil.
- A Ferramenta **Apagar** quando está selecionada permite apagar os objetos que são clicados da janela de visualização um a um.

Com a análise e resumo deste último grupo concluímos, portanto, nossa passagem rápida pelas ferramentas do GeoGebra. Obviamente cada uma das ferramentas citadas acima, e são diversas, geralmente pode ser utilizada de muitas formas diferentes, a depender do contexto e da necessidade de cada construção que se pretende fazer com elas.

Um ponto a ser notado aqui é que algumas ferramentas têm definição e, às vezes utilização, de difícil entendimento. Não é tarefa tão simples explicar o funcionamento de algumas ferramentas do GeoGebra, sobretudo àquelas que exigem por parte do leitor determinados conhecimentos matemáticos que, em diversas situações são um pouco, ou até bastante específicos. Entretanto, não estamos querendo induzir o leitor a pensar que é difícil utilizar este aplicativo pois, de um modo geral, a maioria das ferramentas e das formas de utilização é de fácil entendimento. E como consenso, mesmo que informal entre pessoas que utilizam o GeoGebra, ele é um aplicativo muito intuitivo.

Ainda destacamos o fato de que, ao falar de cada ferramenta do GeoGebra, não mostramos exemplos visuais de como ela poderia ser utilizada. Em primeiro lugar porque tornaria nosso trabalho muito extenso e cansativo e até mesmo um pouco sem sentido no contexto deste trabalho. O objetivo aqui não é fornecer um curso completo de GeoGebra, mas mostrar alguns de seus conceitos básicos e ferramentas que podem ser utilizadas em nosso favor.

Por último, não podemos deixar de perceber que na prática dificilmente encontraremos um problema que exija para sua solução a utilização da funcionalidade de uma única ferramenta do GeoGebra. Em quase toda situação prática faremos construções nas quais serão utilizadas algumas ferramentas que, quando utilizadas em conjunto, produzirão o resultado esperado.

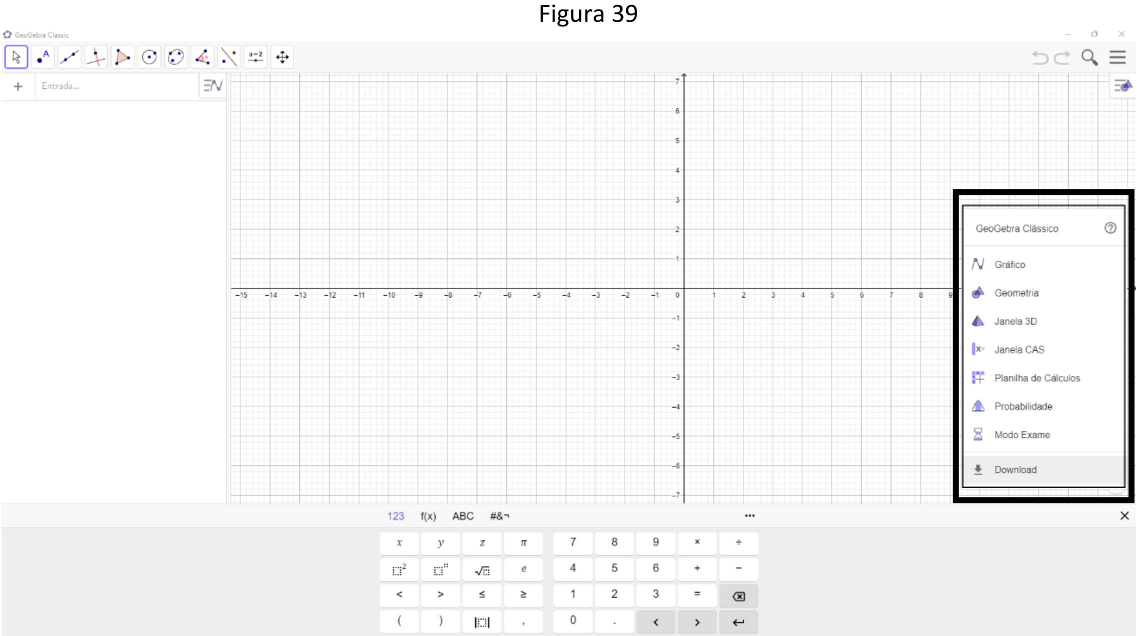
Não verdade o fato de o uso da maioria das ferramentas do GeoGebra ser simples e intuitivo e de elas serem na maioria das vezes usadas em conjunto acaba propiciando uma quantidade enorme de maneiras de utilizar este aplicativo. Tamanha é a quantidade de situações nas quais se pode utilizar o aplicativo que há comunidades espalhadas ao redor do mundo dedicadas a produzir materiais e divulga-los pela internet.

Muitas universidades em vários países têm grupos de estudo dedicados a encontrar novas formas de abordar assuntos da matemática usando o GeoGebra como meio auxiliar. E a partir desses estudos descobre-se a todo instante novas formas de fazer construções matemáticas com o auxílio do aplicativo.

Como dissemos antes faremos uso da interface clássica do GeoGebra. Mas para efeito de comentário, vamos falar antes de passar para o último capítulo do nosso trabalho das outras interfaces do aplicativo que podem se apresentar ao usuário, ou seja, as outras janelas sob as quais o aplicativo pode ser mostrar.

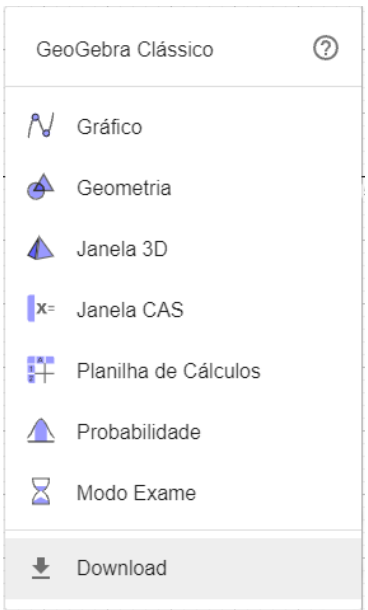
Para falar das janelas do GeoGebra exibiremos novamente a figura 24, que já havia sido mostra anteriormente, agora dando destaque ao menu de seleção rápida das janelas.

Figura 39



Ampliando somente o menu destacado na figura 39 acima vemos:

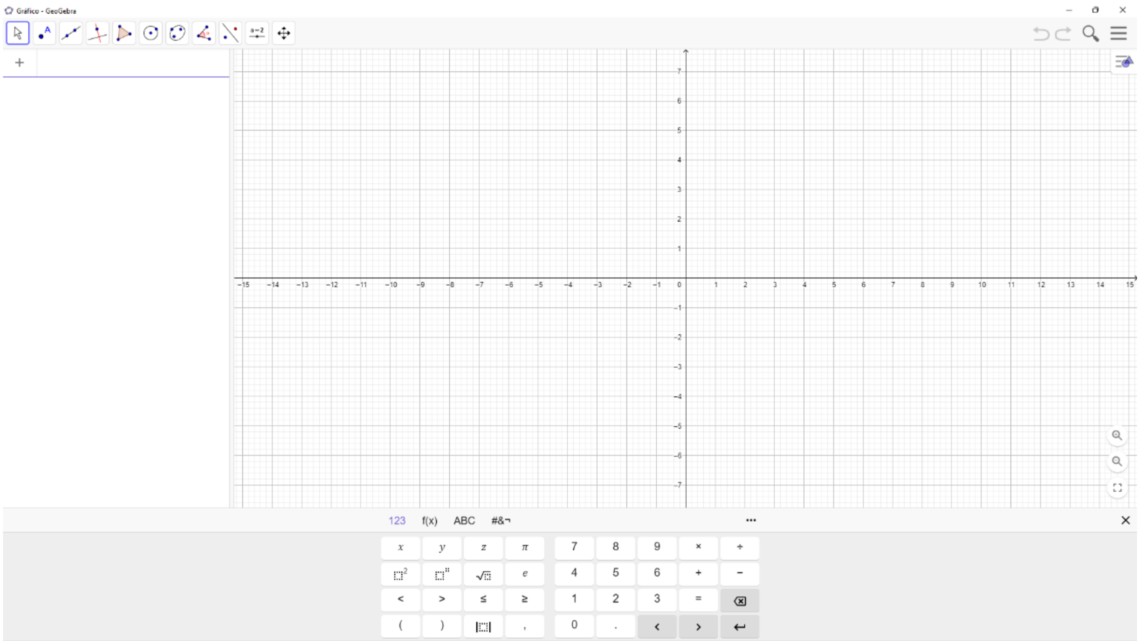
Figura 40



A figura 40 acima mostra o Menu de Seleção Direta de Janelas do GeoGebra (já citado no início deste capítulo). Este menu é utilizado para se ter acesso às diferentes instâncias do aplicativo. Vejamos a seguir algumas dessas opções, e em todos os itens que se segue acessaremos opções referentes a esta figura.

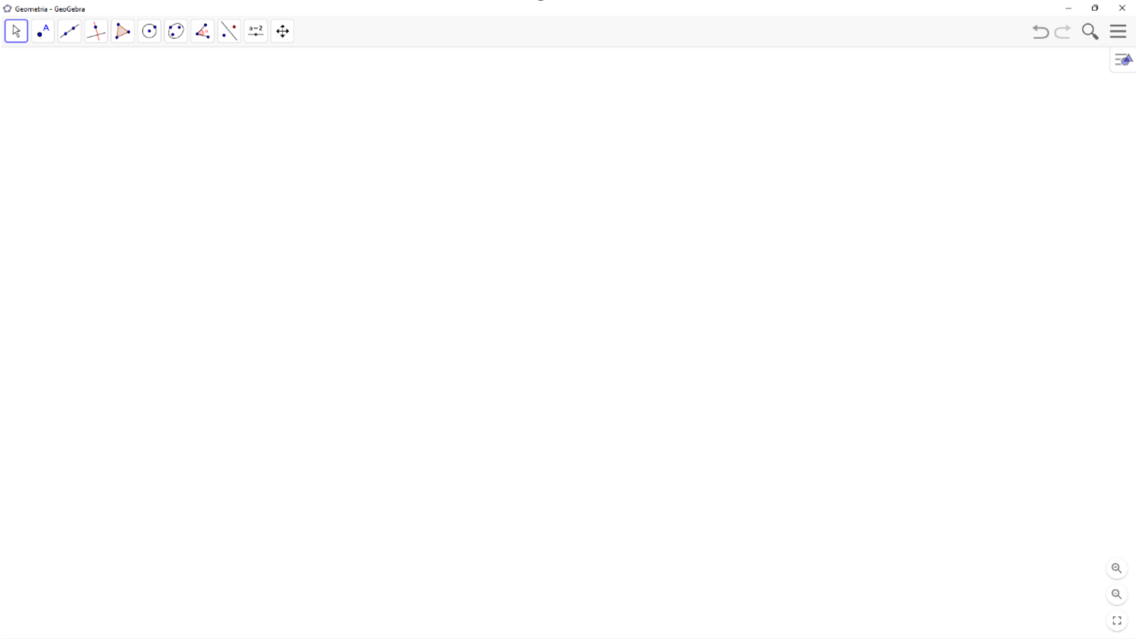
1. Se clicarmos na opção **Gráfico**, o menu de seleção se esconde automaticamente e é exibida a interface otimizada para se trabalhar com a exibição de gráficos como os de funções, por exemplo. É o que vemos na figura 41 mostrada logo a seguir. Esta, inclusive, é a interface mais usado do GeoGebra e é a que utilizaremos como interface principal neste trabalho.

Figura 41



2. Clicando na opção **Geometria** é mostrada uma interface que se parece simplesmente com uma folha de papel em branco, adequada para se fazer desenhos geométricos ao estilo da geometria euclidiana plana. Esta janela está registra a seguir na figura 42, e é bastante utilizada quando se quer trabalhar com pontos, retas, segmentos, vetores e polígonos, por exemplo.

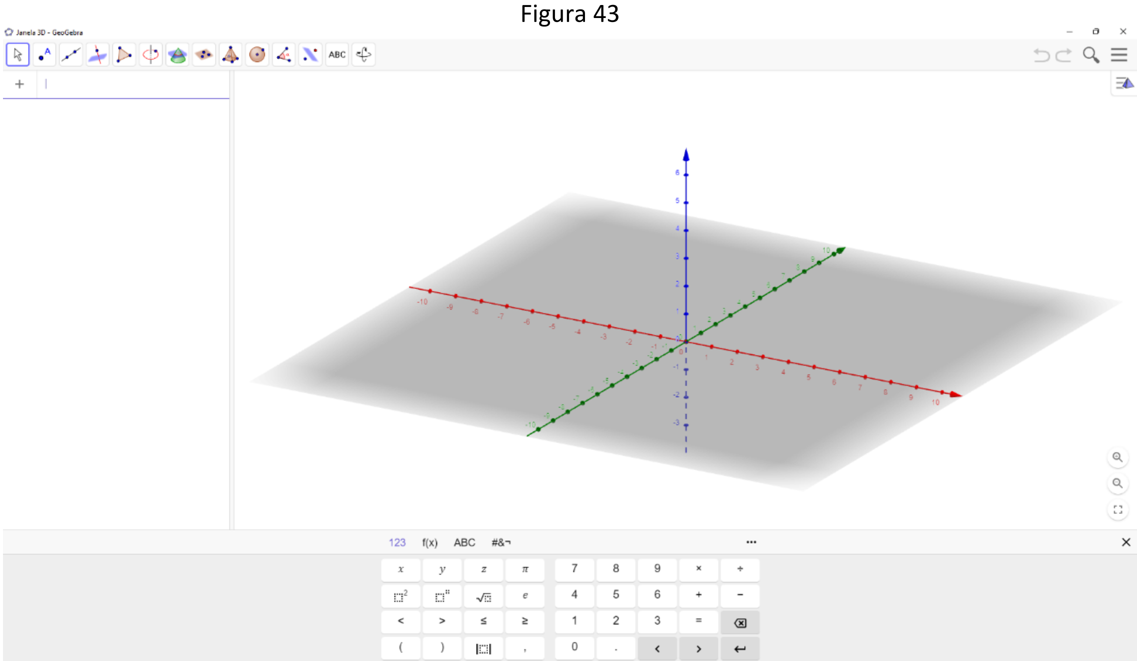
Figura 42



É comum se fazer uma construção geométrica nesta interface do GeoGebra e, depois de pronta, capturar a imagem para utilizar como parte de outros trabalhos em aplicativos como os de edição de texto que não oferecem suporte para este tipo de construção nem tampouco dispõe das ferramentas que o GeoGebra oferece.

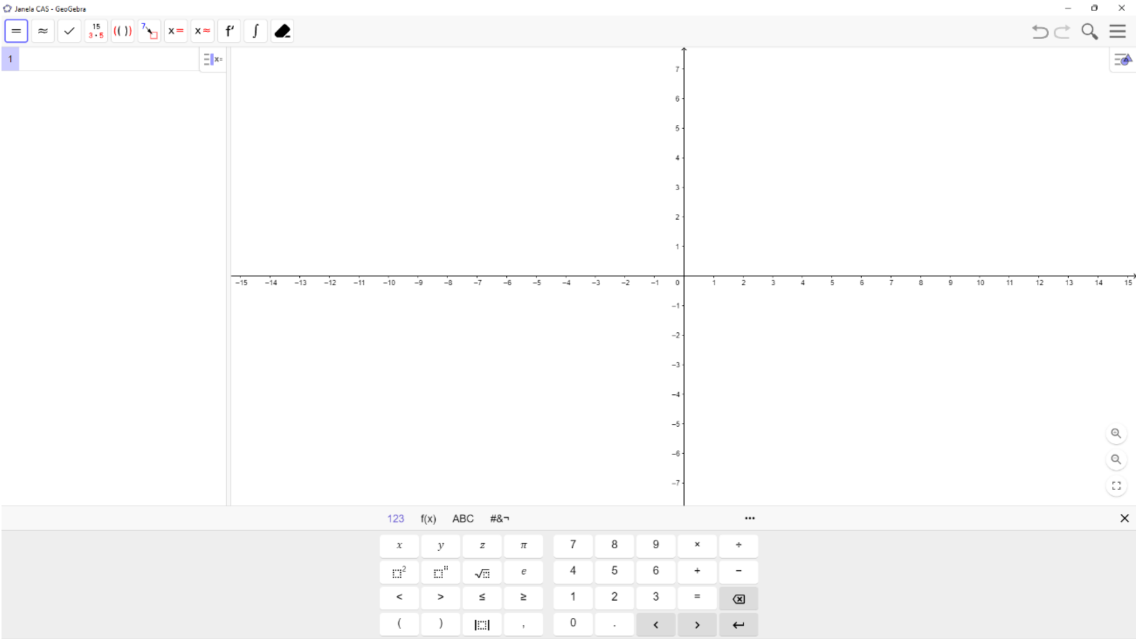
3. Acessando agora a opção **Janela 3D** vê-se a janela a seguir, figura 43, com possibilidades associadas a produção e visualização de figuras em três dimensões.

Figura 43



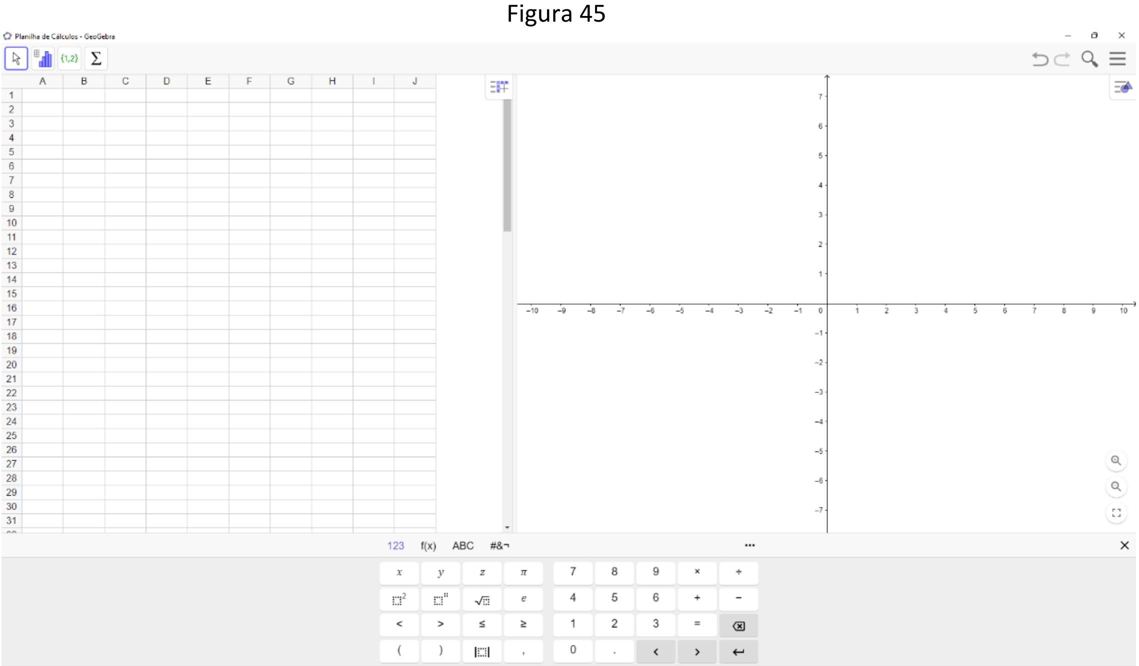
4. Acionando a opção **Janela CAS** é exibida da janela correspondente à figura 44 seguinte, na qual as ferramentas apresentadas são customizadas para trabalho com cálculo (derivadas e integrais).

Figura 44



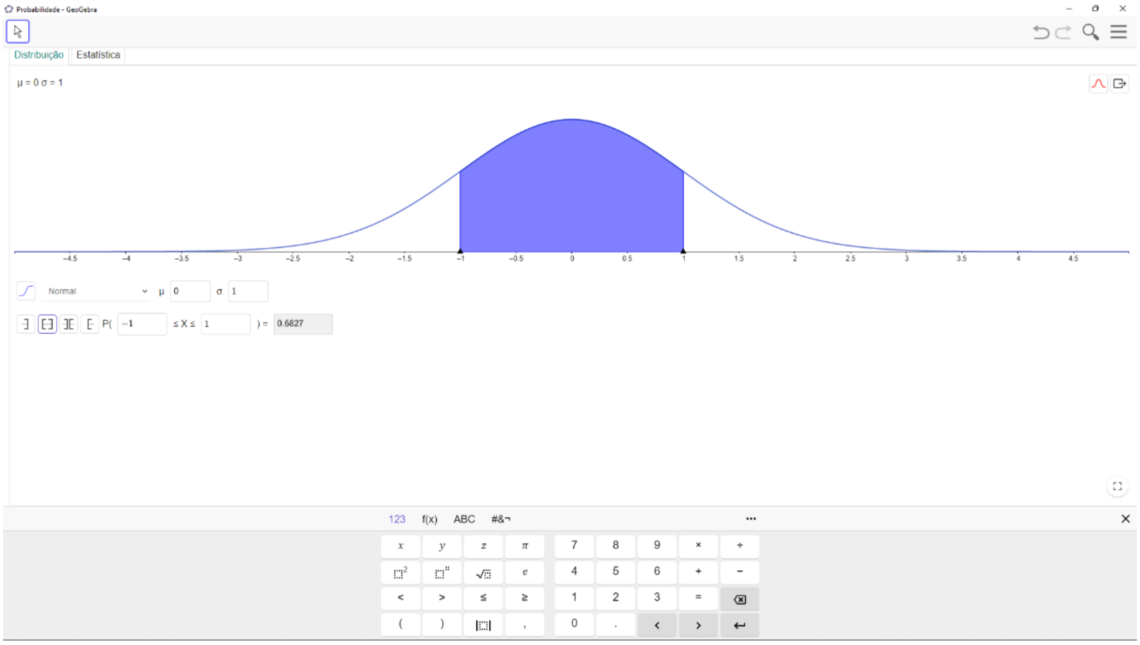
5. A penúltima opção que vamos comentar é a **Planilha de Cálculo**, exibida na figura 45 seguinte. Essa janela traz uma planilha à esquerda onde podemos inserir valores a serem manipulados e analisados, e um plano cartesiano á direta onde podemos ter uma visualização geométrica das informações.

Figura 45



6. Nossa última janela a analisar é a correspondente à opção **Probabilidade**, que nos traz logo de cara uma espécie de gráfico padrão de distribuição de probabilidades. Esta é uma configuração ideal para se trabalhar diretamente com este tema.

Figura 46



Concluímos aqui a apresentação de boa parte das funcionalidades, ferramentas e diferentes interfaces do aplicativo GeoGebra. Como dissemos antes, nosso objetivo não o de explicar com rigor exagerado nem com riqueza de detalhes este fascinante aplicativo de matemática dinâmica que consegue vincular com maestria suas construções e representações algébricas e geométricas. Poderíamos até classificar aqui o GeoGebra como uma espécie de aplicativo de Geometria Analítica.

Mesmo não tendo mostrado detalhadamente todas as opções possíveis de acessar com o GeoGebra cremos que parte do conjunto de ferramentas e funcionalidades que aqui foi exposto já seja suficiente para abarcar as construções relacionadas aos exemplos que citaremos no próximo capítulo desta obra, e também para contribuir com aquele leitor que esteja lendo este trabalho com o intuito de buscar informações sobre o GeoGebra.

CAPÍTULO 4
APLICAÇÕES DO CÁLCULO EM PROBLEMAS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Deste ponto em diante temos a pretensão de explicitar com alguns exemplos, de que maneira as noções básicas sobre os conceitos que envolvem limites e derivadas podem ser aplicados na resolução de problemas estudados na educação básica.

Naturalmente não iremos abordar neste trabalho problemas de grande complexidade e que fogem ao contexto da educação básica, uma vez que nosso objetivo aqui é apenas propiciar um contato inicial dos alunos deste segmento da educação com os conceitos e aplicações de limites e derivadas. Lembrando que na medida do possível usaremos o software GeoGebra como ferramenta tecnológica de auxílio pedagógico.

De forma alguma está proposto aqui que os alunos façam um curso de cálculo em plena educação básica, ou que se use parte significativa da carga horária de matemática para ministrar cálculo aos alunos. Mesmo porque, na atualidade o cálculo nem faz parte diretamente da grade curricular desta etapa da educação. O que se encoraja é que professores possibilitem ao aluno apenas ter acesso às noções iniciais de limites e derivadas e que daí mostre que com apenas esses primeiros conceitos já é possível resolver com certa facilidade os mesmos problemas que resolveriam da maneira tradicional como está nos livros didáticos.

Já que na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) consta que as escolas devem desenvolver um conjunto de disciplinas e dentro de cada uma destas determinado conjunto de assuntos que são obrigatórios em todo país, mas que a mesma BNCC define que há uma parte do currículo que é complementar e variável, dependendo de cada região do país ou então das características da escola ou do público (alunos) a ser atendido por exemplo, então é possível incluir o cálculo como um complemento ao ensino da disciplina de Matemática por exemplo.

Este é um dos pontos onde alguns autores citados na bibliografia deste trabalho concordam: que o cálculo não seja ensinado como um conteúdo a parte, e sim misturado na medida do possível às disciplinas, como sendo uma ferramenta a mais que auxilia na resolução de determinados problemas.

Outro ponto no qual os autores convergem é que com o intuito de fornecer noções de limites e derivas aos alunos visando a resolução de problemas básicos, não há necessidade alguma de tratar o assunto com grandes formalismos nem de apresentar aos mesmos uma quantidade excessiva de definições e de propriedades relacionadas a estes conceitos. Deve-se fornecer-lhes apenas as ferramentas necessárias para a resolução dos problemas em questão. E, se possível, apresentar os conceitos de uma forma intuitiva e visual.

Pode-se constatar com facilidade que os próprios livros de nível superior, tratam os conceitos de limite e de derivada de maneira intuitiva e visual, usando até mesmo uma escrita um pouco informal no começo, para só mais à frente expor as definições formais e com a maneira mais precisa de se escrever.

Uma boa observação a ser feita é que mesmo não sendo obrigatório o ensino de cálculo nas escolas públicas do Brasil atualmente, uma serie de autores inclui este tópico como parte integrante em seus livros. De um modo geral limites de derivadas são colocados como um tópico a ser estudado na terceira série do ensino médio. Algumas escolas públicas quando fazem a escolha dos livros a serem utilizados optam por livros que já disponibilizam o tópico que contém estes assuntos. Portanto em muitas instituições públicas os professores já têm à disposição um material pronto para ser utilizado.

Vale a pena frisar que a depender das possibilidades que o professor tenha em sua escola (ou até mesmo fora dela – online, por exemplo) ou então de acordo com sua escolha e preferência pessoais de trabalho, é possível para ele adaptar a forma como irá apresentar os problemas aqui tratados bem como suas respectivas interpretações e resoluções para sua realidade local.

A título de exemplo, é possível usar uma sala (ou laboratório de informática) para que os alunos possam, por si mesmos e no próprio aplicativo, manipular as informações do problema apresentado com a orientação do professor. Podem ser usados aparelhos celulares smartphone com o GeoGebra previamente instalado. Não havendo forma de os alunos usarem computadores, tablets ou celulares, para eles próprios manipularem o problema via aplicativo, é possível que somente o professor, na própria sala de aula utilize um computador e Datashow para mostrar aos alunos como usar o aplicativo para visualizar, interpretar e resolver o problema; ou então, mesmo não podendo usar um computador em sala de aula, o professor poderia gravar em vídeo todo o processo em sua própria casa, digamos, e apenas mostrar o vídeo para os alunos, discutindo o assunto baseado na apresentação do vídeo.

Já que o software GeoGebra será usado para auxiliar na resolução e interpretação dos problemas propostos é recomendado que o professor, em momentos anteriores fale com os alunos sobre aplicativos matemáticos, citando alguns e perguntando aos alunos se algum deles conhece ou já usou algum desses aplicativos em seu smartphone ou computador por exemplo. É importante instigar os alunos a pesquisarem, conhecerem, começarem a utilizar softwares de matemática para visualizar, interpretar e resolver problemas.

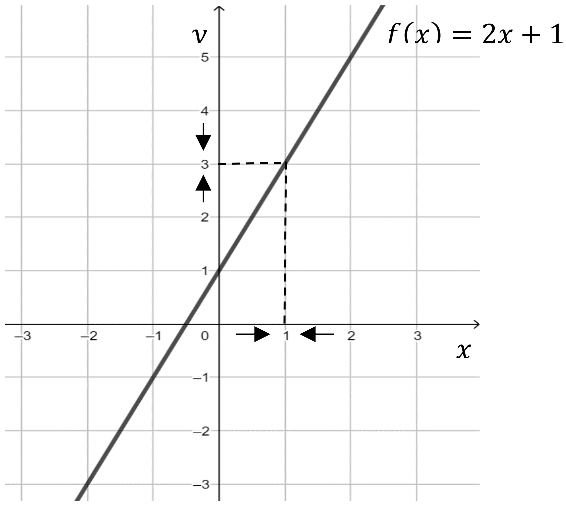
O professor pode citar problemas que os alunos já estudaram em séries anteriores, inclusive em outras disciplinas, como física por exemplo, e que geralmente são de difícil visualização e interpretação por parte da maioria dos alunos, comentando que em aplicativos matemáticos, como é o caso do GeoGebra, tais problemas podem ser visualizados e interpretados de maneira muito mais eficiente.

Dado que o professor já tenha comentado o que indicamos acima e que tenha a intenção de mostrar aos alunos as primeiras ideias relacionadas à limites e derivadas antes de resolver qualquer problema ou mostrar qualquer aplicação destas ferramentas na prática, fica óbvio que um primeiro passo seria utilizar o aplicativo GeoGebra para a visualização e interpretação e entendimento do próprio conceito de limites e derivadas.

Dessa forma, nosso objetivo nos primeiros exemplos a seguir será mostrar de que forma o GeoGebra pode ser usado como ferramenta pedagógica na interpretação dos próprios conceitos de limites e derivas.

Exemplo 1: Expor visualmente e, a seguir, interpretar o conceito de limite de uma função. Usar como ponto de partida a função $f(x) = 2x + 1$.

Solução: No início do capítulo 1 já foi usada a mesma função para iniciar a noção intuitiva de limite (com seu gráfico plotado no próprio GeoGebra) conforme mostrado a seguir:

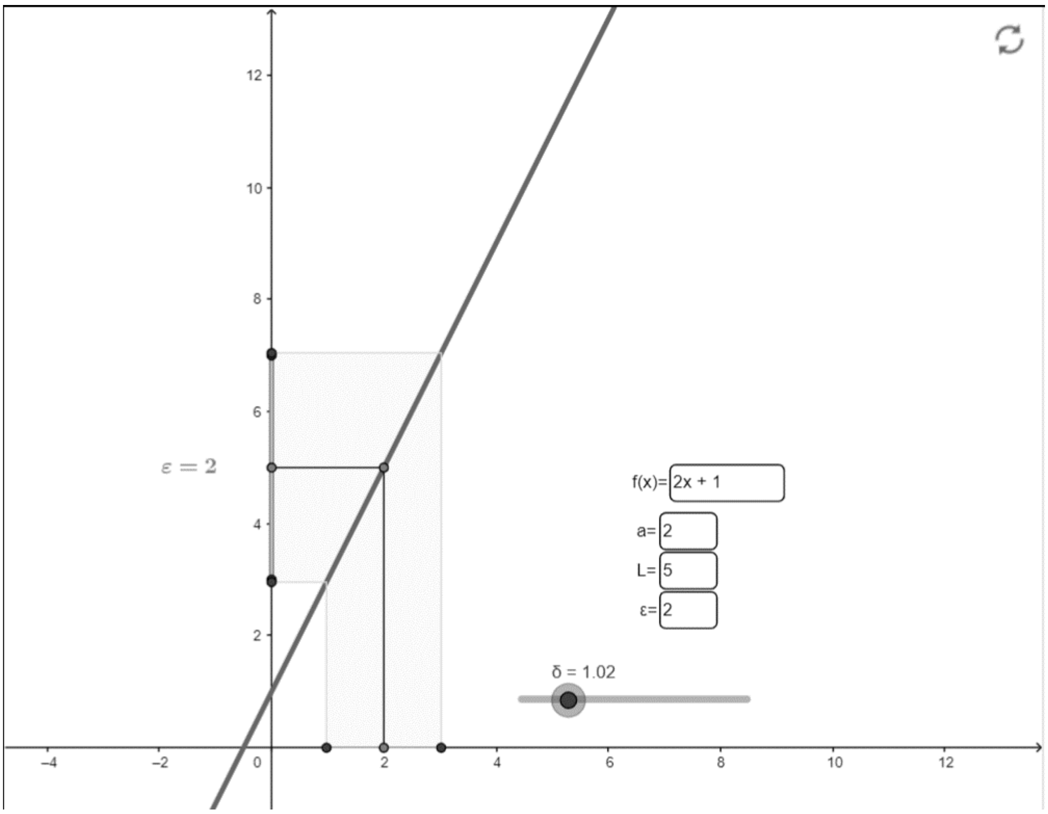


Acontece que no GeoGebra é possível criar animações relacionando parâmetros e mostrando como a variação de um ou mais deles influencia na variação dos demais.

Dessa forma é possível ao professor fazer uma construção prévia para mostrar aos alunos os resultados e efeitos, ou até mesmo em tempo real caso este já tenha certa habilidade em manipular o aplicativo.

A construção poderia ficar assim:

Figura 47



Fonte: Aplicativo GeoGebra

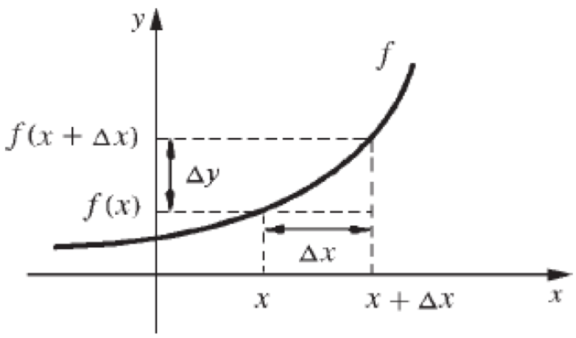
Na figura 47 vemos uma construção mais elabora feita com o GeoGebra com o intuito de explicar a noção de limite. Nela tem-se:

- A reta que representa o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$;
- O valor $x = 2$ (que se optou em representar por $a = 2$) do domínio e sua respectiva imagem $f(2) = 5$ (que está representado por L – da palavra limite);
- Um valor para ε (possível de modificação) que corresponde à distância tanto do ponto que está abaixo quanto do ponto que está acima do número 5 no eixo y (vertical);
- O controle deslizante, que estará associado à variação do δ, podendo ser manipulado de forma manual ou automática. O valor mostrado para o δ corresponde à distância tanto do ponto que está à esquerda quanto do que à direita do número 2 no eixo x (horizontal).

Dispondo apresentação visual o professor, sem dúvida se sentirá mais à vontade para explicar ao aluno as ideias básicas sobre limites, ainda que não fosse possível executar qualquer tipo de animação. Entretanto, esta construção permite mostrar as relações entre os diferentes parâmetros quando os alteramos em tempo real e de forma contínua, como em um vídeo.

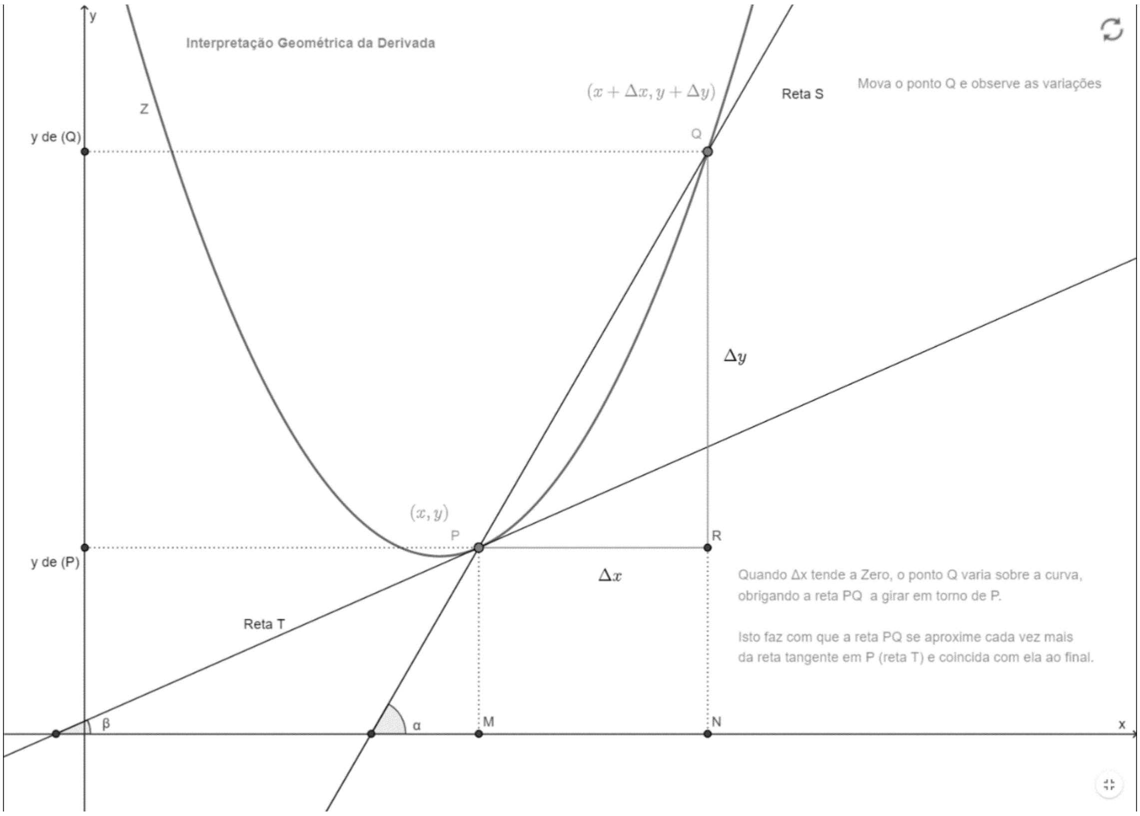
Há também a possibilidade de o professor usar a mesma construção como base para produzir outras semelhantes, substituindo a função por outra, os valores de ε e de δ, alterando o zoom de exibição, e até mostrando casos em que o limite não existe e explicando o porquê.

Exemplo 2: Expor visualmente e, a seguir, interpretar o conceito de derivada de uma função. Usar como ponto de partida uma curva que se assemelhe à da figura 14, que já havíamos usado no capítulo 2 e que está a seguir:



Solução: O professor poderia usar, por exemplo, a seguinte construção baseada no gráfico genérico de uma parábola:

Figura 48



Fonte: Aplicativo GeoGebra

Nesta figura 48 acima temos:

- O gráfico de uma função quadrática, facilmente reconhecido por qualquer aluno do ensino médio, sobretudo da 3ª série;
- Um ponto P fixo e pertencente ao gráfico da parábola, pelo qual passa a reta T tangente à parábola;
- Um ponto Q (não fixo) também pertencente ao gráfico da parábola;
- Uma reta S secante à parábola, que intercepta seu gráfico nos pontos P e Q;
- E alguns pontos e indicações importantes para a explicação e entendimento do conceito.

De posse desta construção o professor poderá explicar entre outras coisas:

- As ideias da reta tangente e da reta secante, e observar seus coeficientes angulares e a relação com a inclinação de cada reta;
- De que forma se relacionam as coordenadas dos pontos P e Q;
- O que são o Δy e o Δx mostrados na construção;
- Que o ponto Q não fixo será movimentado em direção ao ponto P ao longo do gráfico da parábola, e que isto provocará alterações simultâneas em vários dos parâmetros que estão diretamente ligados a ele. (Como a construção é dinâmica e com animação ela pode ser mostrada bem lentamente, de forma manual ou automática, e repetida quantas vezes for necessário);
- Que o quociente entre Δy e Δx é numericamente igual ao coeficiente angular da reta secante ao gráfico da função;
- Que quando o ponto Q tende ao ponto P, Δx tende a zero. E nessa situação limite, o coeficiente angular da reta secante tende a se tornar numericamente igual ao da reta tangente, ou seja,

$$tg\alpha = tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(É este limite que chamamos de derivada)

- O limite descrito logo acima (derivada) é a taxa de variação de y em relação a x.

É importante não deixar de ressaltar que funções como a quadrática que se usou no exemplo acima possuem máximo ou mínimo e que nos pontos onde eles ocorrem o valor da derivada se anula.

Feito isto, pega-se um gancho para inserir uma aplicação da derivada que é a possibilidade de descobrir pontos de máximos e mínimos em funções. Veremos isso em nosso próximo exemplo.

Vimos então nesses exemplos alguns dos potenciais do software GeoGebra na facilitação da compreensão dos conceitos relacionados às definições de limites e derivadas. Se o professor se propõe em mostrar aos alunos as construções já prontas, apenas com o intuito de explicitar e explicar os conceitos é perfeitamente considerável o fato que se poderia mostrar ambos os conceitos da maneira como apresentamos acima em uma única sequência de aulas (em um mesmo dia).

Exemplo 3: Mostrar aos alunos como derivar uma função quadrática em sua forma geral $y = ax^2 + bx + c$ e que, igualando a zero a derivada obtida, é possível encontrar o ponto de máximo ou mínimo da função, bem como o valor que esta assume nesse ponto. E usar o aplicativo GeoGebra para plotar os gráficos (nos casos em que $a > 0$ e $a < 0$) a fim de explicitar e interpretar a situação.

Solução:

Primeiramente aplica-se a derivada a $y = ax^2 + bx + c$, obtendo rapidamente

$$y' = 2ax + b$$

Como os pontos de máximo ou de mínimo de uma função quadrática ocorrem exatamente no vértice da parábola, e que nesse ponto a derivada é igual a zero, então devemos ter:

$$y' = 2ax + b = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$2ax = -b$$

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$$

Substituindo este último valor obtido na equação $y = ax^2 + bx + c$ e fazendo algumas manipulações algébricas obtém-se o valor de y:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$y = -\frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Lembrando que tradicionalmente usa-se $\Delta = b^2 - 4ac$ teremos

$$y = \frac{-\Delta}{4a}$$

Ou seja, o vértice de uma função quadrática genérica do tipo $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ sendo $x_v = -\frac{b}{2a}$ o ponto de máximo (ou mínimo) e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ o valor máximo (ou mínimo) da função.

Para saber se o ponto é de máximo ou mínimo basta verificar que:

- $a > 0 \Rightarrow ponto\ de\ mínimo$
- $a < 0 \Rightarrow ponto\ de\ máximo$

Neste momento o GeoGebra pode ser usado para mostrar visualmente a situação com os gráficos a seguir:

Figura 49

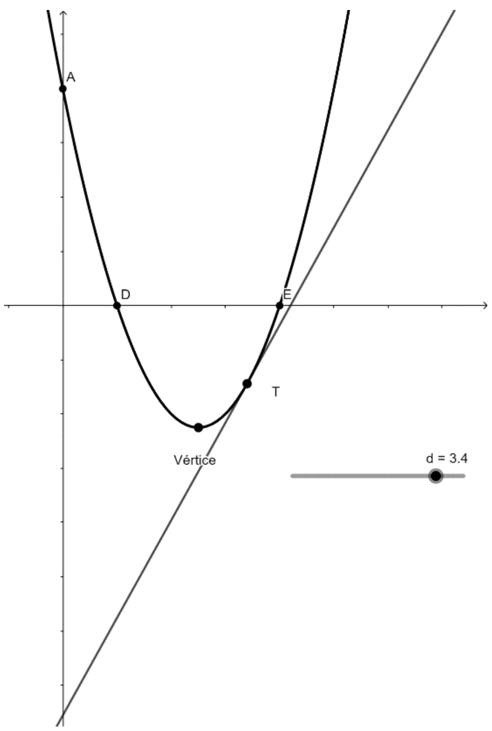
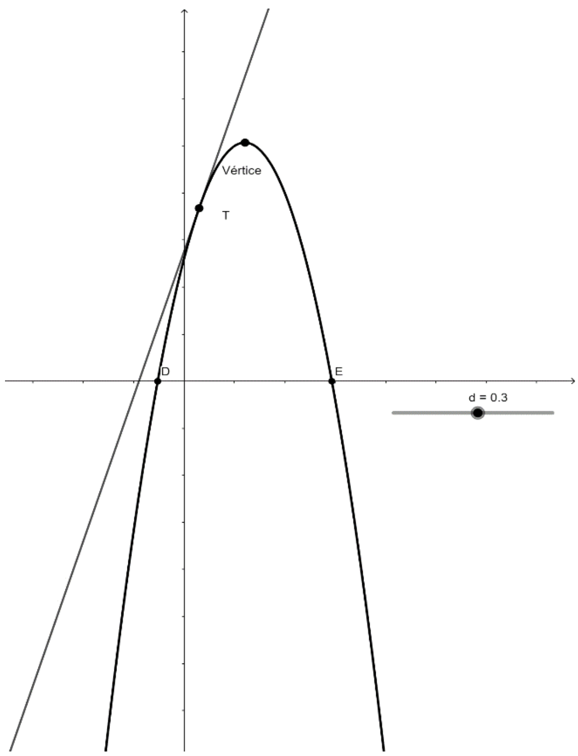


Figura 50



Fonte: O Próprio Autor (Barreto, 2022)

Nessas construções será possível mostrar que ao deslocar o ponto T ao longo do gráfico da parábola a reta tangente acompanha este deslocamento assumindo posições sucessivas que lhe conferem diferentes coeficientes angulares (que são as derivadas em cada ponto).

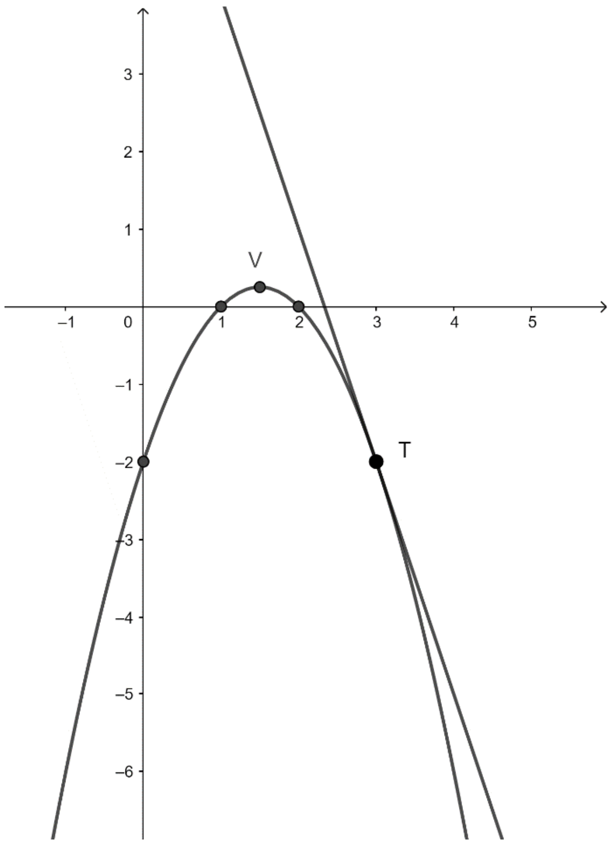
No momento em que o ponto T coincidir com o vértice da parábola, em qualquer uma das duas figuras acima (49 ou 50), a reta tangente ficará paralela ao eixo x (horizontal) e isto indica que naquele ponto (vértice da parábola) a derivada é nula, ou seja, o coeficiente angular da reta tangente é igual a zero.

Uma aplicação bastante comum da derivada em problemas de geometria analítica é mostrada no exemplo logo a seguir.

Exemplo 4: Determine o coeficiente angular e a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ no ponto T de abcissa 3.

Solução: A figura abaixo a seguir construída com no GeoGebra nos dá rapidamente uma ideia visual do problema.

Figura 51



Fonte: O Próprio Autor (Barreto, 2022)

Primeiramente aplica-se a derivada à função $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ obtendo

$$f'(x) = -2x + 3$$

A seguir aplica-se a derivada para $x = 3$ a fim de determinar $f'(3)$.

$$f'(x) = -2x + 3$$

$$f'(3) = -2 \cdot 3 + 3$$

$$f'(3) = -3$$

Portanto o coeficiente angular já está determinado, e é $m = -3$.

Agora substitui-se $x = 3$ (a abscissa dada no problema) na função f para obter a ordenada do ponto T (de tangência).

$$f(x) = -x^2 + 3x - 2$$

$$f(3) = -(3)^2 + 3 \cdot 3 - 2$$

$$f(3) = -9 + 9 - 2$$

$$f(3) = -2 \Longrightarrow T(3, -2)$$

A reta que procuramos passa por $T(3, -2)$ e tem coeficiente angular $m = -3$. Daí sua equação será dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - (-2) = -3 \cdot (x - 3)$$

$$y + 2 = -3x + 9$$

$$y = -3x + 7$$

Com isso determinou-se a equação da reta tangente que o problema pedia.

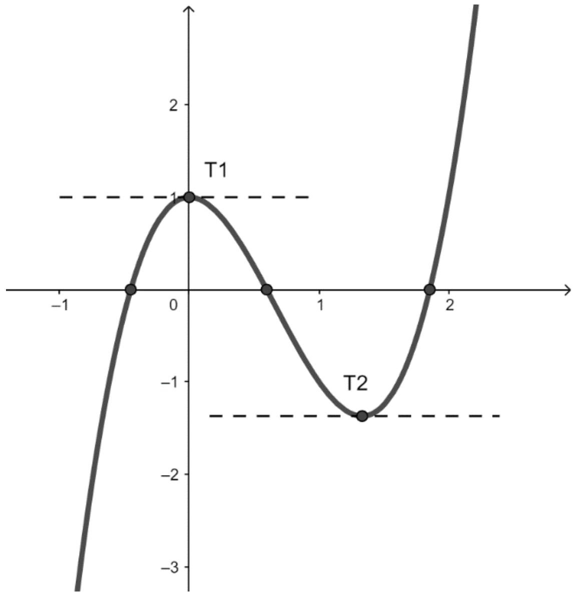
Exemplo 5: Se a posição s de uma partícula é dada pela expressão $s(t) = 2t^3 - 4t^2 + 1$, onde t representa o tempo em segundo e s a posição em metros, determine:

a) A velocidade da partícula nos instantes $t = 1s$ e $t = 2s$;

b) A aceleração para cada instante dado no item anterior.

Solução: De início pode-se usar o GeoGebra para observar o gráfico da função dada.

Figura 52



Fonte: O Próprio Autor (Barreto, 2022)

Observa-se da figura 52 acima dois pontos $T1$ e $T2$ acompanhados de segmentos horizontais tracejados para mostrar que nesses pontos a reta tangente é paralela ao eixo das abscissas e, portanto, a derivada deve ser nula. Além disso, pode-se observar que a derivada nula acontece em dois pontos porque a função dada é do terceiro grau e, sendo assim, sua derivada será uma função do 2º grau, a qual terá duas raízes exatamente correspondentes aos valores onde a derivada se anula.

Dito isto passemos à resolução do primeiro item.

a)

Primeiro aplica-se a derivada à função $s(t) = 2t^3 - 4t^2 + 1$, obtendo uma expressão para a velocidade

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 8t$$

Agora pode-se encontrar $v(1)$ e $v(2)$ como segue

$v(2) = 6 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1$ $\qquad$ $v(5) = 6 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2$

$v(2) = -2\, m/s$ $\qquad$ $v(5) = 8\, m/s$

b)

Utiliza-se a função da velocidade $v(t) = 6t^2 - 8t$ obtida no item a) e deriva-se esta, a fim de obter a expressão da aceleração

$$a(t) = v'(t) = 12t - 8$$

Substituindo $t = 1$ e $t = 2$ teremos

$a(1) = 12 \cdot 1 - 8$ $\qquad$ $a(2) = 12 \cdot 2 - 8$

$a(1) = 4\,m/s^2$ $\qquad$ $a(2) = 16\,m/s^2$

Exemplo 6: Uma companhia aérea fretou um avião de 50 lugares para uma empresa de turismo de modo que cada passageiro pagará 500 reais se todos os lugares estiverem ocupados. Caso algum lugar fique vazio, então cada passageiro pagará 25 reais a mais por cada lugar vazio.

Nestas condições, qual número de lugares ocupados na aeronave que maximiza a receita da empresa?

Solução:

Representando por x vazios na aeronave, a expressão para a receita da companhia pode ser calculada através da expressão a seguir:

$$R(x) = (50 - x) \cdot (500 + 25 \cdot x)$$

Onde:

- $50 - x$ é o número de lugares ocupados;
- $500 + 25 \cdot x$ é o valor arrecadado de cada passageiro.

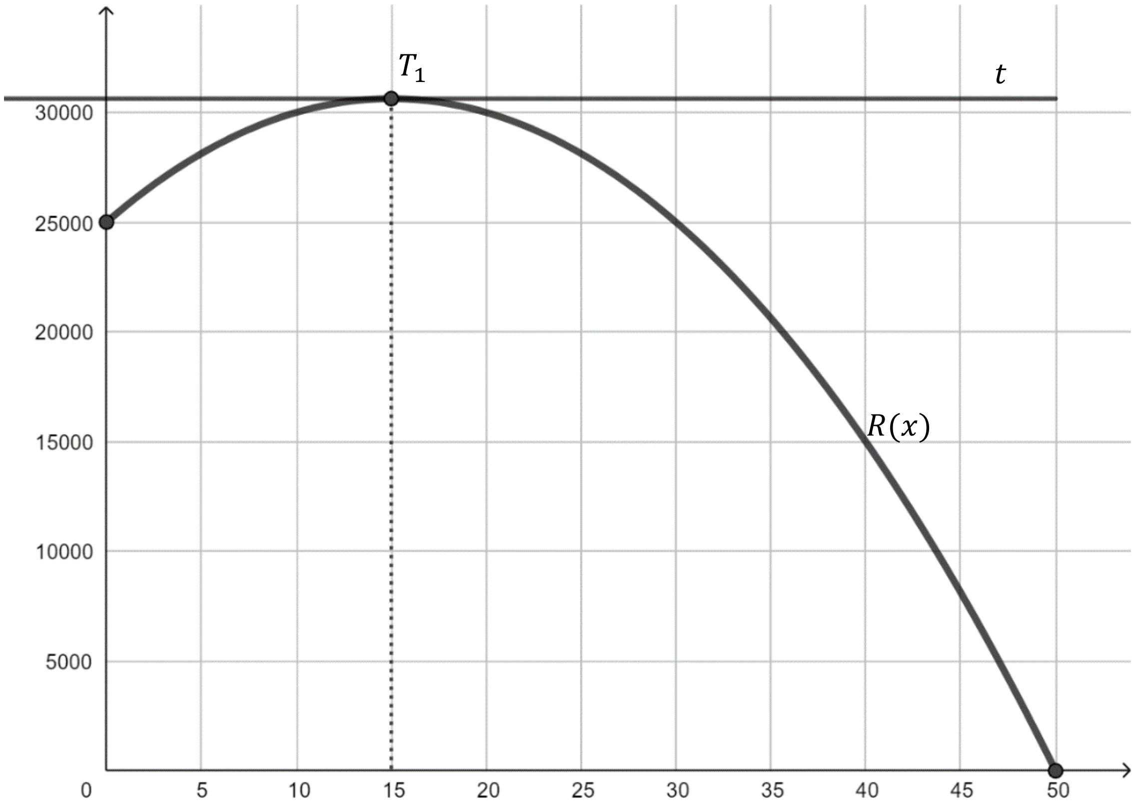
Desenvolvendo a expressão acima e fazendo as simplificações necessárias obtém-se:

$$R(x) = -25x^2 + 750x + 25000$$

Esta última expressão é quadrática e, portanto, podemos aplicar o raciocínio já comentado no exemplo 3. Ou seja, aplicando a derivada à função $R(x)$ e igualando a zero, obteremos o valor de x que torna a receita máxima.

Comentário: Em uma aula comum seria um tanto complicado esboçar o gráfico da função $R(x)$ pois seus coeficientes são valores grandes comparados ao cálculo comum que se costuma fazer normalmente. Entretanto dispondo do GeoGebra e usando a ferramenta que permite fazer uma distorção na proporção dos valores dos eixos cartesianos podemos exibir o gráfico da função $R(x)$ como se segue.

Figura 53



Fonte: O Próprio Autor (Barreto, 2022)

A simples visualização deste gráfico no qual representou-se por t a reta tangente (horizontal ao gráfico da função $R(x)$) e por T_1 o ponto de tangência já é motivo suficiente para que o aluno suponha intuitivamente que a resposta será $x = 15$. Entretanto é conveniente continuar o cálculo para comprovar esta conjectura.

Aplicamos então a derivada e igualamos a zero. Temos

$$R(x) = -25x^2 + 750x + 25000$$

Portanto,

$$R'(x) = -50x + 750$$

Daí,

$$R'(x) = 0 \Longrightarrow -50x + 750 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 15}$$

Logo, o número de lugares ocupados será

$$50 - x = 50 - 15 = \boxed{35}$$

Portanto, com 35 lugares ocupados a receita da empresa será máxima.

Exemplo 7: Ao analisar um paciente que tem um tumor no corpo, uma médica supõe que este tenha formato esférico e quer determinar qual será a taxa de aumento do volume do tumor naquele instante, sabendo que o raio do tumor é 0,4 cm e que o raio está crescendo a uma taxa de 0,007 cm por dia.

Solução: Como o tumor citado na questão tem forma esférica usaremos o fato de que seu volume é dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Em algum instante t o tumor tem raio $r = 0{,}4\ cm$. Além disso, a taxa de crescimento desse raio em relação ao tempo (derivada do raio em relação ao tempo) é dada por $\frac{dr}{dt} = 0{,}007\ cm/dia$. Ao mesmo tempo, a taxa de crescimento instantânea do volume em relação ao tempo é dada por:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(0{,}4)^2 \cdot 0{,}007$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}007$$

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}00448\pi\ \ cm^3/dia$$

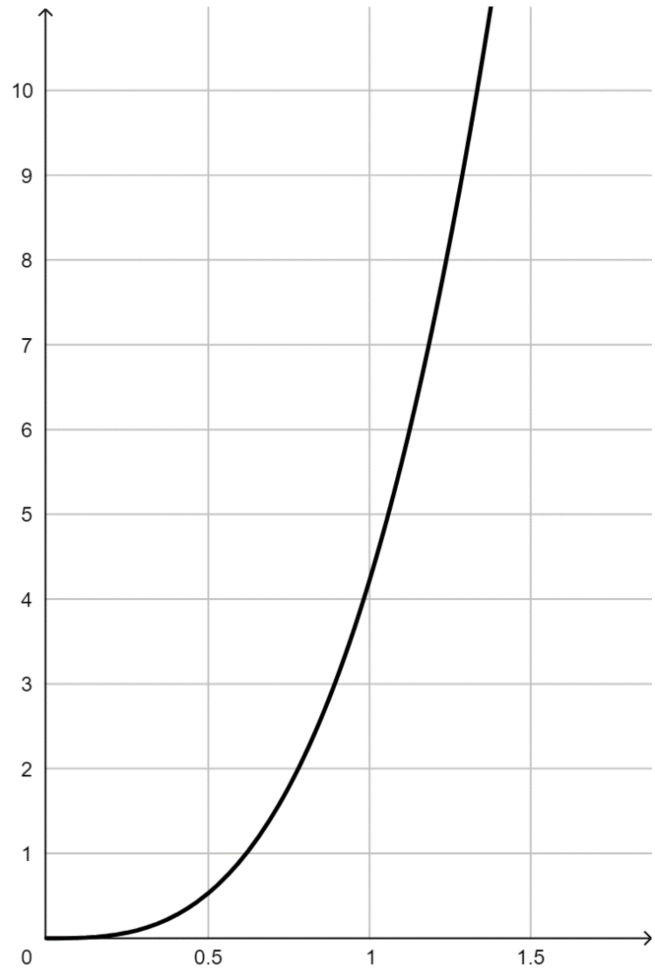
Usando a aproximação $\pi = 3{,}1415$ teremos:

$$\frac{dV}{dt} \cong 0{,}141\ \ cm^3/dia$$

Portanto o aumento do volume do tumor, por dia, é aproximadamente $0{,}141\ cm^3$.

É possível plotar no GeoGebra o gráfico que dará uma ideia da variação do volume V do tumor em função da variação do raio r.

Figura 54



Fonte: O Próprio Autor (Barreto, 2022)

Observe neste caso que novamente fizemos uma pequena distorção nas proporções dos eixos cartesianos de modo a enfatizar melhor a visualização de que quando $0 < r < 1$ a variação do tumor não chega a ser tão "grande", porém a partir de $r = 1\ cm$ o tumor cresce de forma abrupta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mostrou-se neste trabalho uma maneira possível de se introduzir a noção básica e intuitiva dos conceitos de limite e de derivada em aulas de matemática para alunos da terceira série do ensino médio. Mostrou-se também que o uso do software GeoGebra pode entrar como ferramenta tecnológica para auxiliar este processo.

Uma das ideias é que esta passagem rápida pelos conhecimentos básicos do cálculo propicie um aproveitamento melhor dos alunos que venham a cursar disciplinas ligadas a este conhecimento matemático nos mais variados cursos de nível superior que assim exijam.

De maneira similar o fato de os alunos poderem ter algum contato com um software matemático, que é atualmente utilizado por milhões de usuários em centenas de instituições no mundo todo e que possui aplicabilidade para se estudar praticamente todos os tópicos ligados à matemática de nível médio e superior, provavelmente irá lhes aguçar a curiosidade e instigar a buscar mais informações ou conhecimentos sobre tal aplicativo, e outros similares.

Aliar o estudo do cálculo, que é uma ferramenta matemática magnífica para resolução de problemas, às possibilidades criadas por um software de tanto potencial e de tão simples manipulação como é o caso do GeoGebra, é, sem dúvida, uma excelente combinação e que tem grande chance de produzir bons frutos dentro da educação básica.

Como mostrou-se, o uso do GeoGebra para auxiliar no ensino das noções de limite e derivada faz com que o processo se torne mais “fácil” e ágil. E é esse “tempo menor” no qual os alunos irão se apropriar das ideias e de algumas ferramentas básicas do cálculo que lhes dará uma vantagem para que usem o “tempo restante” e com apenas algumas ferramentas simples do cálculo para praticar em algumas aplicações que este tem em assuntos do ensino médio.

Que este possa ser então um material que sirva de ponto de partida para que professores da educação básica se sintam provocados, encorajados e motivados a levar até seus alunos as noções iniciais dos conceitos matemáticos tratados nesta obra, tão importantes para a ciência matemática e para a sociedade como um todo.

BIBLIOGRAFIA

ÁVILA, G. O ensino de cálculo no segundo grau. Revista do Professor de Matemática, n. 18, p. 1–9, 1991.

_____. O ensino da matemática. Revista do Professor de Matemática, v. 1, n. 23, p. 1–7, 1993.

_____. Limites e derivadas no ensino médio? Revista do Professor de Matemática, n. 60, p. 30–38, 2006.

BOYER, C. B. Cálculo: Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. 1. ed. São Paulo: Atual, 1992. v. 6.

BITTAR, Marilena. *A incorporação de um software em uma sala de Matemática: uma análise segundo a abordagem instrumental*. Prelo, 2010.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática. 2ed. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRASIL Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino médio - matemática. secretaria da educação fundamental. Brasília: [s.n.], 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 30/01/2017.

BRASIL. PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmentros Curriculares Nacionais. Ciência da Natureza, Matemática e Tecnologia. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

. .: Ensino médio. Brasília: [s.n.], 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/14_24.pdf>. Acesso em: 28/04/2017.

CALIL, Alessandro Marques. *Caracterização da utilização das TIC's pelos professores de Matemática e diretrizes para ampliação do uso*. Juiz de Fora - MG. 2011.

COSTA, José Carlos de Oliveira. *O Currículo de Matemática no Ensino Médio do Brasil e a Diversidade de Percursos Formativos*. São Paulo - SP. 2011.

DOMINGUINI; GOMES, Solange Freitas; ALVES, Ester de Souza Bitencourt. *Limite de uma função: Conteúdo viável para o ensino médio?* GT02 – Educação matemática no ensino médio e ensino superior. II CNEM. IX EREM. Ijuí - RS. 2007.

DUCLOS, R. C. Cálculo no segundo grau. Revista do Professor de Matemática, n. 20, p. 26–30, 1992.

FROTA, Maria Clara Rezende; BORGES, Otto. *Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologia na educação Matemática*. GT: Educação Matemática, n.19, CNPQ, 2008.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. Recursos Computacionais no Ensino de Matemática. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. Fundamentos de matemática elementar: Limites, derivadas e noções de integral. 3. ed. São Paulo: Atual, 1977. v. 8.

KENSKI, Vani Moreira. *Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância.* 5ed. Campinas, SP, Papirus, 2008.

MIORIM, M. A. Introdução a história da educação matemática. São Paulo: Atual, 1998, p.95.

MOLON, Jaqueline. *Cálculo no ensino médio: Uma abordagem possível e necessária com o auxílio do software Geogebra*. Santa Maria - RS. 2013.

OLIVEIRA, Fernando Rodrigues de. *Uma proposta para o ensino de noções de cálculo no ensino médio*. Porto Alegre - RS. 2010.

OLIVEIRA, J. S. B.; ALVES, A. X.; NEVES, S. S. M. História da Matemática: contribuições e descobertas para o ensino-aprendizagem de matemática. Belém: SBEM, 2008.

PCNs Fáceis de Entender. Nova Escola. Abril. Edição Especial. São Paulo, SP.

PINTO, N. B. Marcas históricas da matemática moderna no brasil. Revista Diálogo Educacional, v. 5, n. 16, p. 25–38, 2005. 84